BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIV
D
104
NAPOLI

DE' SOLIDI ORDINATI,
DEGL' INNOMINATI,
E DI QUELLI
DI SECONDA OPERAZIONE.

TRATTATO

DE' SOLIDI ORDINATI, O REGOLARI,

DE' SOLIDI, CHE SARAN DETTI INNOMINATI, DI QUELLI, CHE SI DIRANNO DI SECONDA OPERAZIONE,

E

DELLE PROPRIETA' DELLA SFERA,

E

DA TALI SOLIDI SI RIPETONO

DEL SACERDOTE NAPOLETANO

CESARE PUOTI.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III NAPOLI

B. R. NAPOLI

IN NAPOLI M. DCCC. I.
NELLA STAMPERIA SIMONIANA.

Con licenza de' Superiori.

A SUA ECCELLENZA

IL SIGNOR GENERALE

D. GIOVANNI ACTON

CAVALIERE DEGL' INSIGNI ORDINI

D I

S. GENNARO, E S. FERDINANDO,

E

CONSIGLIERE DI STATO IN ATTIVITA'
DELLA MAESTA'

D I

N. S. D. G.

RE DELLE DUE SICILIE.

ECCELLENZA

IL Trattato de' Solidi Ordinati, o Regolari, che per la prima volta al Pubblico ſi moſtra oltre di ſviluppare gli attributi di queſti Solidi, e di aprirci il cammino per la cognizione di altri ignoti Soli-

di tant' opportuni, per intendere la natura degli angoli Solidi, e per diſcernere nella Sfera nuovi attributi, tende di vantaggio direttamente a fiſſare, e rettificare in noi le tanto vaghe, eſteſe, ed aſtratte idee dell' Ordine, e della Regolarità.

Lo ſviluppo di queſte idee ſolleva l' uomo a riconoſcere, e venerare un Ente Supremo ſommamente Savio, ſommamente Potente autor dell' Ordine dell' Univerſo; lo ſolleva a riconoſcere in ſe un principio penſante, dal conoſcerſi capace d'intendere, e di produr l'Ordine; e lo ſolleva in fine a riconoſcere, e riſpettare nella Società, per poter

eſſere ordinata un Principe, come quella Parte di Eſſa, che ſi conoſcerà dell' eſſenza di ogni Ente Ordinato, con cui le altre tutte àn rapporto, dipendenza ed attacco; ſarebbe dunque degno della generoſità dell' E. V., che à ſaputo tanto ben ſoſtenere i diritti dell' Ordine, or che i maligni tentavano di roveſciarlo, il garentire anche queſt' opera, che tende allo ſteſſo; permetterà perciò Ella, ch' io fregi, ed illuſtri queſte mie deboli fatiche del glorioſo ſuo Nome, cui intendo ſacrarle, e ſaprà, mi auguro, ſoffrire un tale ardire, ove vegga provenirlo men dalla voglia di ſoſtener l'opera, che da quella di ve-

derne

derne l'effetto, giacchè ſollevateſi queſte notizie a quell' altura, in cui le ſue doti più, che la carica àn giuſtamente iſtallata l' E. V., ed animate dall' aura della valevole ſua protezione più agevolmente dovranno negli altri tutti diffonderſi; dovendo così ciaſcuno, imitando la generoſità dell' E. V., non oſtante l'incultura del fonte, approſſimar volentieri il ſecondo le labbra a quelle acque, alle quali non à l'E. V. ſdegnato di approſſimarle dapprima.

La ſviluppata idea dell'Ordine ci moſtra di vantaggio, che il legame, che l'Ordine ſteſſo induce tra la Parte Principale, e le altre tutte di ogni Ente Ordinato così

modifichi le forze, e le tendenze di eſſe, che faccia inſorger nel Tutto quel momento, ch'è il ſolo opportuno a conſeguirne l'Oggetto; e così, che quello, con cui l'Ordine annoda il Sovrano co' vaſſalli tutti lo ſia così mirabilmente conteſto, che modificando in Quegli, e queſti le forze, le voglie diſtribuiſca con tanto proporzionato equilibrio tra di eſſi i diritti, i doveri, che induca l'eſercizio, e l'adempimento di queſti nella Società quella comune armonia, tranquillità, ſalvezza, in cui ſolo ne riſiede l'Oggetto; ſe è così dovrà tanto ciaſcun vaſſallo intereſſarſi, per riſchiarare, e ſtabilire, i Sacri diritti dell'Or-

dine, e perciò quelli del Sovrano, quanto lo deve, per proccurare il proprio bene; e perciò quel vaſſallo, che, per quanto è da ſe, s'incarichi di un tale oggetto, facendo il ſuo dovere, non fa, che il proprio vantaggio, e così trova nell' opra ſteſſa il ſuo più, che generoſo compenſo.

Baſterà queſto, per aſſicurare l' E. V., che il ſolo deſiderio di veder l'Ordine riſtabilito in quel grado immigliorabile, in cui fu dall'Autore, che non fa, che il perfetto, iſtallato, abbia dato moſſa al mio labbro, e che altro, perciò non ſappia io dal Signore, volendo il proprio bene, implorare, che di conſervarci imman-

cabilmente i Noſtri Auguſti Amabiliſſimi Sovrani, e quei, che ne ſono il ſoſtegno, e le braccia, come quelli, che a noi preſta l'Ordine, acciocchè nel reggerci ci ottengano la noſtra felicità; e così queſto ſteſſo aſſicura me, che voglia l' E. V. tanto amica dell' Ordine, e perciò tanto giuſtamente attaccata al Sovrano, compiacerſi di gradir queſta offerta, e di concedermi dacciò l' onore di credermi, come mi dico inalterabilmente per ſempre

Di V. E.

Napoli del 1801.

Umiliſs. ed obbligatiſs. ſerv. vero
Ceſare Puoti.

INDICE

DE' CAPI.

CAPO I.

DEl Solido Regolare in generale. pag. 23.

CAPO II.

Della Piramide Regolare. 37.

CAPO III.

Dell' Ottaedro. 54.

CAPO IV.

Del Cubo. 88.

CAPO V.

Del Dodecaedro. 113.

CAPO VI.

Dell' Icosaedro. pag. 147.

CAPO VII.

E' de' soli piani, e Solidi Ordinati, o Regolari il comprendere il centro. 181.

CAPO VIII.

Della misura degli angoli solidi, e de' Solidi Innominati. 195.

CAPO IX.

De' Solidi di Seconda Operazione. 154.

CAPO X.

Delle proprietà della Sfera, delle quali si viene a notizia da quelle de' Solidi Regolari, e di Seconda Operazione. 282.

D E'

SOLIDI ORDINATI,

O

REGOLARI.

PREFAZIONE.

§. 1. CHe abbia di comune l' Ordine colla Regolarità, onde i Solidi Regolari ſianſi anche detti Ordinati è neceſſario premettere al trattato di queſti Solidi; queſto ſi otterrà coll' eſporre le idee dell'Ordine, e della Regolarità; e così fiſſateſi queſte idee tanto per loro ſteſſe vagh' ed aſtratte ſaranno anche di ſicura ſcorta nella ricerca degli attributi di queſti Solidi.

§. 2. L' Ordine non è, che quella diſpoſizion delle parti di un tutto qualunque, che lo rende più adattato all' oggetto, cui è deſtinato.

§. 3. La Regolarità ſia in un piano, ſia in un Solido non è, che quella di-

ſpoſizione delle ſue dimenſioni, cioè, delle ſue parti, che alla ſua regola, o ſia ſua norma più adattato lo rende.

§. 4. Regola, o Norma della Regolarità ſi è l' uniformità, giacchè non può concepirſi un ſoggetto qualunque Regolare, ſenza concepire in eſſo una convenienza, e conformità con una data ſua regola, o ſia ſua Norma; ove dunque voglia concepirſi un ſoggetto Regolare ſenz' aſſegnarne l' eſterna ſua Regola, con cui convenga, è neceſſario, che queſta in eſſo ſteſſo ſi rinvenga, è neceſſario cioè, così comprender diſpoſta ciaſcuna ſua parte, da eſſer la ſua diſpoſizione di regola, e norma a ciaſcuna delle altre; è neceſſario dunque comprenderle tutte uniformemente diſpoſte; ecco perchè la regola, o norma della Regolarità non ſia, che l' Uniformità (a).

§. 5.

(a) Se l' Uniformità aſſicura la Regolarità ſia de' piani, ſia de' Solidi; e ſe non può dubitarſi, che riſieda nel cerchio, e nella ſfera una onnimoda Uniformità; perchè non numerarſi il cerchio tra piani, la ſfera tra Solidi Regolari? I Matematici àn voluto trattar de' ſoli rettilinei regolari nella Piana, ed ànno accennat' i ſoli Poliedri Regolari nella Solida; ſotto queſti aſpetti non entrava nè il Cerchio, nè la ſfera,

§. 5. L' Ordine dunque abbraccia i tutti d' ogni genere, la Regolarità i soli dimensimili; l'Ordine riguarda in quelli la disposizion delle part' in rapporto all' Oggetto, la Regolarità riguarda in questi la disposizion delle parti in rapporto alla norma; la Regolarità dunque

ra, de' quali perciò àn separatamente trattato. Chi però nell' ordinare l' intero corso di Matematica, sollevatosi di un altro scalino, volesse riguardar la Regolarità, che pos' aver luogo tra piani, e quella, che possa tra Solidi rinvenirsi, dovrebbe certamente cominciar dal cerchio ne' piani, e dalla sfera ne' Solidi. Si osserverà in fatti nel decorso dell' opera un sommo stretto nesso, e ligame, che à il cerchio co' piani, e la sfera co' Solidi Regolari; e si conoscerà ne' piani Regolari un punto equidistante dagli anguli, e dai lati; e nei Solidi Regolari un punto dagli anguli, dai piani, e dai lati equidistante; e si vedrà di vantaggio un tale attributo tanto ai primi, ed ai secondi essenziale, che questo solo ammessos in un piano, in un Solido si troverà quel piano, quel Solido Regolare; dal che, siccome l' Uniformità si è l' interna norma della propria Regolarità, che ciascuno piano, o Solido Regolare in se stesso comprende; così potrebbe anche dirsi, che l' esterna, e comune norma de' piani, o Solidi Regolari sia il cerchio, o la sfera, che sia cioè, la continua uniformità di questi norma della discontinua uniformità di quelli. Resterà tutto ciò maggiormente confermato dal conoscersi appresso dei solidi, oltre i cinque già noti, terminati da piani regolari, simili, ed eguali, che non altrimente possan crederssi non Regolari (come realmente non sono), che per non esser uniformi anche negli anguli Solidi, nè nella sfera iscrittibili.

non è, che ſpecie dell' Ordine; ecco d' onde comincia a vederſi il perchè da Matematici i piani, e Solidi Regolari ſianſi anche detti Ordinati (*a*).

§. 6. L' idea dunque dell' Ordine è aſtratta, e relativa; aſtratta perchè di un tutto qualunque ne riguarda la ſola diſpoſizion delle parti, relativa perchè tra tutte le poſſibili combinazioni, che poſſono aver luogo tra le parti di un tutto qualunque, quella ſola è ordinata, che più corriſponde all' Oggetto.

§. 7. Così del pari aſtratta, e relativa ſi è l' idea della Regolarità; aſtratta perchè di un qualunque dimenſibile ne riguarda la ſola diſpoſizion delle parti, cioè delle ſue dimenſioni; relativa, perchè di tutte le poſſibili diſpoſizioni di eſſe quella ſola è regolare, che più corriſponde alla Norma. Siccome dunque riſiede l' Ordine nella maſſima corriſpondenza all' oggetto; così riſiede la Regolarità nella maſſima corriſpondenza alla Norma.

§. 8.

(a) Qual ſia l' attributo, pel quale queſta ſpecie ſuperi il ſuo genere ſi vedrà in appreſſo.

§. 8. Deve di vantaggio l' idea dell' Ordine riguardarsi, come un quarto termine provveniente da tre; dall' idea cioè, di un Soggetto risultante da parti, e perciò variamente disponibili, che può dacciò dirsi Ente Ordinabile; da quella di una Forza, che può variamente disporre quelle parti, che può dacciò dirsi Ente Ordinante; e da quella in fine di un Oggetto, a cui venga l' Ordinabile dall' Ordinante diretto coll' indotta in esso disposizion delle parti.

§. 9. Varia dunque l' Ordine da altrettanti principj, per rapporto cioè, dell' Ente Ordinante, per rapporto dell'Ordinabile, e per rapporto dell' Oggetto; sarà dunque l' estension dell' Ordine in ragion composta di questi; conosceremo perciò la sua estensione, conosciuta quella de' suoi fattori.

L' Ente Ordinante.

§. 10. Se l' Ordine risiede, in quella disposizion delle parti, che più corrisponde all' Oggetto (§ 2), dovrà l'Ente Ordinante, per produr l'Ordine, esa-

minare tutte le combinazioni, che poſſono aver luogo tra le parti del tutto, che intende ordinare, e ſcegliere, ed indurre quella, che trova più corriſpondente all' Oggetto; deve dunque l' Ente Ordinante eſſer fornito di ragione, e di forza, e perciò ſarà l' eſtenſione degli Enti Ordinanti eguale a quella degli Enti ragionevoli.

§. 11. Dal che, non potendo l' effetto aver luogo ſenza la cauſa, nè mai eccederla; potremo dall' Ordine conoſcere l' eſiſtenza, ed il momento di forza, e di ragione, che almeno riſieda nell'Ente Ordinante; e perciò potremo giuſtamente dall'Ordine, che nell' univerſo incontraſtabilmente ſi ammira, conchiudere, *Eſiſte l' Ordinante di un tant' Ordinato ſommamente ſavio, ſommamente potente.*

§. 12. E così dovremo parimente per lo ſteſſo principio riguardar l' Ordine, come conſeguenza, ed effetto della più eſatta, e raffinata dimoſtrazione dell'Ente Ordinante; e dovremo perciò riconoſcere in eſſo o una ſomma, e Suprema Intelligenza, o quella, che in quel punto di queſta tanto imita i tratti, che

ci

ci assicuri, essere animata dall' imagine di questa Suprema Entità. Riconosciamo dunque, e veneriamo nell' Ordine o la stessa Suprema Intelligenza, o l' imagine di essa; e riconosciamo, e rispettiamo nell' uomo, che può nella sua riga intendere, e produr l' Ordine tale imagine della Suprema Intelligenza, che da essa solamente poteva in esso ispirarsi.

§. 13. E' dunque l'Ordine, come uno specchio, che tramezza la Infinita, e le finite intelligenze; vediamo in quello, per quanto a noi lice, i tratti della Suprema Entità; ed in questa veduta medesima vediamo vivere in noi l' imagine di Essa dallo stesso Benefico Originale ispirata, e riflessa.

L' Ente Ordinabile.

§. 14. Se è questo ogni tutto qualunque, cioè, qualunque Soggetto risultante da parti (§ 8), potendo ogni Ente Contingente riguardarsi, o come un Tutto, o come una parte della specie, cui appartiene, o nell' uno, o nell' altro aspetto insieme; giacchè non esiste Ente Con-

tingente, che non ne riconoſca altri della ſteſſa ſpecie; ſarà ogni Ente Contingente all' Ordine Soggetto, cioè ordinabile; e così ſarà l' eſtenzione dell' Ente Ordinabile tanto maggior di quella dell' ente contingente, quanto le coſe, e le ſpecie inſieme ſon delle coſe.

§. 15. Se ſono anche le ſpecie ordinabili, potendoſi riguardar, come tutti, de' quali ſiano gl' individui le parti; ſarà figlio della cognizion dell' Ordine anche il diſcernere qual forma di Governo più conveng' alla Società per ottenerne l' Oggetto.

L' Oggetto.

§. 16. Queſto non è, che ciocchè ſi vuole, che ottenga il Tutto coll' indotta in eſſo diſpoſizion delle parti (§ 8); or ſe l'Ordine importa (come a ſuo luogo vedremo), che niuna parte dell'Ente Ordinato ſia ſciolta dalla catena, dal neſſo della coſpirazione all' Oggetto, e ſe non può negarſi, che un Ordine eſiſta nell' Univerſo; dovrem dire, che ciaſcun ente anche il più picciolo, ed agli occhj degli ſciocchi diſprezzabile, abbia il

ſuo

ſuo oggetto particolare, e che queſti tutti mirabilmente coſpirino all'Oggetto Generale; anzi, ſiccome non eſiſte materia, che non poſſa ricever diverſe forme, cioè dirigerſi a diverſi Oggetti, nè ſpecie di cui non poſſa farſi lo ſteſſo; intenderemo da ciò, eſſer l' eſtenſion degli Oggetti molto maggior di quella delle coſe, e ſpecie inſieme.

§. 17. Veduta dunque la ſomma eſtenſion dei termini quaſi fattori dell' Ordine, potremo avvicinarci ad intendere, l' interminata eſtenſione di Eſſo; Di queſta idea dunque tanto vaga, ed eſteſa, che tutto comprende, tutto abbraccia, tutto riguarda, e che ſolo provviene dalla più eſatta dimoſtrazione, debbon crederſi eſſere i caratteri, e gli attributi particolari, cioè di ciaſcun ordine particolare tutte le più raffinate conſeguenze de' principj, delle dimoſtrazioni, de' precetti, delle regole delle ſcienze tutte, delle facultà, delle arti, che non è poſſibile in un ſolo aſpetto comprendere; nè volendo, come quì far s' intende, ſviluppare la generale idea dell'Ordine, per così ſcorgere quanto abbia di comune con

quella

quella della Regolarità, altro resta ad esaminare, che i soli generali, ed essenziali caratteri, ed attributi di Esso; lasciando dunque alle scienze, ed arti tutte la cura di fissarne gli speciali caratteri, ed attributi, ci addirremo all' esame de' soli generali.

§. 18. Questi son tre l'Unità, il Minimo Possibile, la Parte Principale.

§. 19. *L'Unità, è Dell' essenza dell' Ordine.*

I. Dovendo in un Tutto, per essere Ordinato, la disposizion delle parti esser quella, che lo renda più adattato all'Oggetto, cui è destinato (§ 2); questa potrà solo aver luogo, quando ciascuna sua parte sia a quello diretta, quando, cioè, ciascuna così cospiri verso lo stesso, da dover insieme tutte ottenere ciocchè non possono separate; or questa direzione, e questa cospirazione si è appunto quella catena, quel nesso, che forma delle parti tutte, quantunque distinte, un tutto solo; è dunque dell' essenza dell' Ordine l'Unità.

II.

II. Se una ſola parte ſia ſciolta dalla catena della coſpirazione, e perciò dall' Unità, non entrerebbe questa in quella combinazione, che l' Ordine produce; e perciò ſarebbe l' indotta combinazione, nell'ipoteſi, quella, che avrebbe reſo non il Tutto, ma, ſe fuſſe poſſibile, parte di eſſo adattat' all' Oggetto; ma rende l'Ordine il Tutto, e non già parte di eſſo adattat' all' Oggetto (§ 2); è dunque dell' eſſenza dell' Ordine l' Unità.

COROLLARJ.

§. 20. I. Segue dall' Unità, che debba tra le parti tutte d' ogni Ente Ordinato aver luogo un rapporto, ed attacco.

§. 21. II. Ma ſegue dall' Ordine l'Unità; dunque è dall' Ordine anche il legame; ma la coſpirazione delle parti tutte all'Oggetto, (che forma il legame) rende il Tutto capace di conſeguirlo; il legame dunque con cui l'Ordine annoda le parti tutte d' ogni Ente Ordinato è quello, che lo rende capace di conſeguirne l' Oggetto; deve dunque sì fatto legame così modificar delle parti le ten-

denze

denze le forze, che faccia insorgere nel Tutto quel momento, ch' è il sol opportuno a conseguirne l' Oggetto.

§. 22. III. Poichè tutte le parti d' ogni Ente Ordinato cospirano all'Oggetto, e ciascuna non può sola ottenerlo; dovrem da ciò considerar l'Oggetto di ogni Ente Ordinato, come diviso a tutte le part' in tanti oggetti particolari, ed in modo, che cospirando le parti agli oggetti particolari ottengano al Tutto l'Oggetto Generale; è dunque dell' essenza dell' Ordine, che ciascuna parte abbia il suo oggetto particolare, e che da questi tutti risulti l' Oggetto Generale.

§. 23. IV. L' Ordine dunque esclude così ogni parte sciolta inoperosa, e senz' oggetto suo particolare, come ogni altra dirett' ad Oggetto non cospirante all' Oggetto generale.

§. 24. V. Se ogni parte d' ogni Ente Ordinato à il suo oggetto particolare; e dalla convergenza, e cospirazione di questi risulta l'Oggetto Generale del Tutto Ordinato; dovrem dire, che in ogni Ente Ordinato ogni minima parte sia così all' Ordine necessaria, che mancando,

per

per ipoteſi, manchi l' Ordine ſteſſo; ſe dunque un Ordin' eſiſte nell' Univerſo, dovrem confeſſare, che ogni minima ſua produzione abbia il ſuo oggetto coſpirante, e contribuente all'Oggetto Generale; e perciò, che non eſiſta, nè ſi produchi coſa in natura diſprezzabile, come gli ſciocchi ſi perſuadono, è ſuperflua.

§. 25. *Il Minimo Poſſibile, cioè Uſare il Minimo Poſſibile de' mezzi nel conſeguir l' Oggetto è dell' eſſenza dell' Ordine.*

I. Se deve l' Ordine provvenire dalla più eſatta, e raffinata dimoſtrazione dell' Ente Ordinante (§ 12), manca ove ſia quella mancante; ma non può non eſſer quella mancante, ove adopri mezzi maggiori de' neceſſarj; queſti dunque eſcludono l' Ordine; e perciò dov' è l' Ordine à luogo il Minimo Poſſibile.

II. Queſti mezzi non neceſſarj non ſarebbero, che parti del Tutto, e ſarebbero tali, nell'ipoteſi, da poter il Tutto ottener l' Oggetto anche ſenza la di loro in-

influenza; sarebber dunque fuori della combinazione, che al Tutto proccura l' Oggetto, fuori della cospirazione, fuori del nesso, fuori dell' Unità, fuori dell' Ordine (§ 19), dov'è dunque l'Ordine à luogo il Minimo Possibile.

III. In ogni Ente Ordinato ogni minima parte è così all' Ordine necessaria, che mancando, manca l' Ordine stesso (§ pr.); dov'è dunque l'Ordine non posson esser parti superflue; e perciò usare il Minimo Possibile de' mezzi nel conseguir l' Oggetto è dell' essenza dell' Ordine.

COROLLARIO.

§. 26. Il Minimo dunque Possibile è conseguenza dell' Unità, poichè quella parte, che fa nel Tutto da mezzo non necessario è come intrusa nella combinazione, nella cospirazione, nel nesso, nell' Unità, ma realmente è sciolta da essa; potendo la combinazione, nell' ipotesi, proccurare al Tutto l' Oggetto senza di essa.

§. 27.

§. 27. *La Parte Principale, cioè,*

E' dell' eſſenza dell' Ordine, che ſia nel Tutto una ſua parte così diſpoſta, che abbiano ſeco le altre tutte rapporto, ed attacco; onde reſta quella detta Parte Principale.

I. E' neceſſario in un Tutto, per eſſer ordinato, che le ſue parti abbian ſeco rapporto, ed attacco (§ 20); ma per dar luogo ad un tal rapporto, ed attacco ſenza offendere il Minimo Poſſibile, ch' è del pari all' Ordine eſſenziale (§ 25) è neceſſario, che ſia in eſſo una ſua Parte così diſpoſta, che abbiano ſeco le altre tutte rapporto, ed attacco; perchè così ciaſcuna in quella avrà rapporto, e ſarà ligat' all'altre tutte col minimo de'rapporti, col minimo de'ligami; è dunque dell' eſſenza dell'Ordine, che ſia nel Tutto la Parte Principale.

II. E' dell' eſſenza d' ogni ente ordinato, che delle ſue parti coſpirino le tendenze, le direzioni, le forze (§ 19), gli Oggetti particolari (§ 21); ma non può darſi sì fatta coſpirazione ſenz' ammet-

metterſi un punto, in cui convergendo convengano le tendenze, le direzioni, le forze, gli Oggetti particolari; cioè ſenz'ammettere nel Tutto una Parte, che queſte amodi, ed allacci, e così faccia delle parti un Tutto, e renda le tendenze, le direzioni, le forze, e gli oggetti particolari di eſſe, che diviſi non baſtavano, uniti ſufficienti ad ottener l'Oggetto Generale; è dunque dell'eſſenza dell'Ordine il comprendere la Parte Principale.

III. E' certamente non ſolo eſſenziale, ma l'eſsenza iſteſsa di ogni ente quell'attributo, da cui gli altri tutti derivano; ma reſterà a ſuo luogo dimoſtrato, che ammeſso in un piano, in un ſolido un punto, con cui le parti tutte umogenee abbiano lo ſteſso rapporto, ed attacco, tutt'in quel piano, in quel ſolido ſi veggan riſplendere i caratteri, e gli attributi dell'Ordine, e della Regolarità (*a*); è dunque il comprendere un punto sì fatto l'eſsenza iſteſsa dell'Ordine, e della Regolarità; ed è perciò non ſolo

(a) Si vegga il Capo VII.

lo eſsenziale, ma l' eſsenza iſteſsa dell' Ordine il comprendere la Parte Principale.

§. 28. Nè vale il dire, che poſſan più part'inſiem' eſſer in luogo della Parte Principale, e diſimpegnarne le funzioni con maggior energia; poichè queſto importarebbe certamente una combinazione aliena dall' Ordine, e dalla Regolarità; giacchè la coſpirazione, la convergenza madre dell'Unità, figlia dell'Ordine (§ 19) non puote aver luogo, ſenza darſi un punto, in cui convergendo convengano le tendenze, le direzioni, le forze; e così vedeſi di fatto avvenire ne' Piani, e Solidi Ordinati, e Regolari; ed il Minimo Poſſibile all' Ordine parimenti eſſenziale (§ 25) diametralment' eſclude, che ſia fatto per più, cioccchè può farſi per uno.

COROLLARJ.

§. 29. I. Viddimo eſſer figlio della cognizione dell' Ordine il diſcernere qual forma di Governo più conveng' alla Società, per ottenerne l'Oggetto (§ 15) or vediamo, che l'Ordin' eſigga, che ſia nel

tutto una ſua Parte, così diſpoſta, che abbiano ſeco le altre tutte rapporto, ed attacco; dovrem dunque ſicuramente confeſſare, che fra tutte le varie forme di Governo, che poſſono aver luogo nella Società, la ſola Monarchica ſia analog' all' Ordine, ed alla Regolarità; e perciò quella, che rende la Società più adattat' a conſeguirne l'Oggetto. E' ſtata dunque la ragione, e non l' intereſſe de' Preti, come a lor modo cianciano i Republicani, che à ſtallat' i Monarchi ne' cardini delle Società Ordinate; riconoſciamo perciò, e riſpettiamo nel Monarca, ponendo da banda, quanto Queſto ſerba di Sacro, le ſue ben alte, e ſtabili radici; colle quali poggia nell' Ordine ſteſſo del Tutto.

§. 30. II. Se d' ogni Tutto Ordinato è l'Ordine quello, che ne annoda le parti, e con tal ligame, che modificandone le tendenze le forze inforga nel Tutto quel momento, ch'è ſol'opportuno a conſeguirne l'Oggetto (§ 21); e ſe l'Ordin' è quello, che induce nella Società il Siſtema Monarchico; ſarà l'Ordine quello, che ne liga le parti, e ne ſarà il lega-

me

me quello, che lo rende opportuno all' Oggetto; sarà dunque un tal ligame così mirabilmente conteſto, che modificando le forze, le voglie de' membri tutti della Società, diſtribuiſca con tanto proporzionato equilibrio tra la Parte Principale, e le altre tutte, cioè, tra il Sovrano, ed i vaſſalli tutti, i diritt i doveri, che induca l' eſercizio, e l' adempimento di queſti nella Società quella comune armonia, tranquillità, ſalvezza, in cui ſolo ne riſiede l'Oggetto. Il crederci dunque ſciolti da queſti tanto ſacri doveri invece di produrre il noſtro bene, c' inabilita a conſeguirlo; ed il praticarne, e procurarne l' adempimento invece di riuſcire a noi, ed agli altri gravoſo, proccura il comun bene, la comune tranquillità, la comune ſalvezza.

§. 31. III. E' l'Ordine dunque quell' opera della Divinità più agli occhi noſtri brillante, che ci ſollev' a riconoſcere, e venerare un Ente Supremo ſommamente Savio, ſommamente Potente Autor dell'Ordine dell'Univerſo (§ 11) a riconoſcere in noi ſteſſi un principio penſante, in cui troviamo da quell' Ente i-

ſteſſo Benefico impreſſa l'imagine della ſua Intelligenza, riconoſcendoci capaci d'intendere, e di produr l'Ordine (§ 12); e ci ſolleva in fine a conoſcere la neceſſità di avere nella Società, per poter eſſere ordinata, un Principe, a cui reſti dall'Ordine ſteſſo commeſſo il manubrio dell'ordinata Macchina Sociale (in cui ſono da Quegli annodate le tendenze, le direzioni, le forze, le voglie de' membri tutti di eſſa) per reggerla, e dirigerla alla felicità.

§. 32. IV. Se uno è il fonte in cui vediamo l'eſiſtenza di un Dio, la ſpiritualità dell'anima, la baſe del Monarca; non poſſono non chiuder gli occhj della ragione (che perciò chiamano i noſtri ſavj dono de' Dei ſdegnati) anche alle prime verità quelli, che confeſſandos'indegni di quel dono, li chiudono ſciaguratamente per l'ultima. Queſto in fatti è lo ſtato de' Noſtri Repubblicani.

§. 33. V. Poichè l'eſſenza de' piani, e ſolidi Regolari la vedremo, come s'è detto, ripoſta nel comprendere un punto, con cui le parti tutte umogenee abbiano lo ſteſſo rapporto, ed attacco; conoſcia-

mo

mo dacciò chiaramente il perchè quei piani, e solidi sianſi anche detti Ordinati; e conoſciamo parimente il divario, e l'eccesſo della Regolarità ſopra l'Ordine; l'Ordine cioè, importa, che ſia nel Tutto una parte, con cui le altre tutte abbiano rapporto, ed attacco; la Regolarità eſige di vantaggio, che di queſti rapporti, ed attacchi quelli delle parti umogenee, cioè, della ſteſſa ſpecie, ſiano eguali.

§. 34. VI. Se tale è dunque il neſſo, che paſſa tra l'idea dell'Ordine, e quella della Regolarità, non potrà non reſtare illuſtrata, e rettificata in noi la tanto eſteſa, ed aſtratta idea dell'Ordine (§ 17) ove ſia appieno ſviluppata, e fiſſata quella della Regolarità. Ecco perchè nel tempo appunto, in cui, noſtro malgrado, ſi vedeva roveſciar l'Ordine, e queſto dall' uomo ſteſſo, che ne doveva eſſere il conoſcitore, l'adoratore, ed il fabbro, ſi è da me ardito trattar, per la prima volta, di queſte idee quanto ſublimi, eſteſe, e riſpettabili, tanto utili, e neceſſarie; ecco perchè debba ciaſcuno perdonare in me l'ardita intrapreſa, e per-

donare all'opera quanto esibisce di ruvido, impulito, e superfluo; perchè inseparabile dapprima da una produzione recentement'estratta dal profondo seno della Verità; ed ecco in fine il perchè debba ciascuno avidamente introdursi, e coraggiosamente inoltrarsi negli arcani della Regolarità; nell' intelligenza, che da me non ne troverà, che solo aperte le porte.

CAPO I.

DEL SOLIDO REGOLARE IN GENERALE.

Definizioni, e nozioni preliminari.

DEFINIZIONE I.

§. 1. UN Solido dicesi Ordinato, o Regolare, se sia terminato da piani regolari, simili, ed eguali così combinati, che da egual numero degli anguli di tali piani sia compreso ogni solido suo angulo.

AVVERTIMENTO I.

§. 2. La norma della Regolarità non è, che l'Uniformità (*a*); quindi siccom'è regolare quel rettilineo, di cui siano uniformi, e perciò eguali i lati, e gli an-

(a) Si legga il §. 4. della prefazione colla sua nota.

anguli; così è regolare quel poliedro, di cui siano uniformi, ed eguali i lati, gli anguli piani, gli anguli solidi; si conosceranno in fatti dei solidi (che saran dett' Innominati) terminati da piani regolari, simili, ed eguali e perciò uniformi nei lati, e negli anguli piani, che non son regolari, perchè non uniformi anche negli anguli solidi; un sì fatto attributo dunque non solo poteva, ma dovev' assumersi nella definizione di questi Solidi.

AVVERTIMENTO II.

§. 3. Quantunque però tanto persuada la stessa natura della Regolarità, che esclude affatto dai termini qualunque difformità; pure, perchè dallo stesso sviluppo de' Solidi Regolari si conosceranno degli anguli solid' ineguali, quantunque compresi da egual numero di anguli piani relativamente eguali, si è perciò nella definizione soltanto asserita l'esterna uniformità degli anguli solidi, e non l'eguaglianza di essi; poichè però si conoscerà di vantaggio, che non possano non esser eguali quegli anguli solidi, che sian compresi

preſi da ſoli tre anguli piani relativament'eguali, perciò ſi aſſumerà anche l'eguaglianza degli anguli ſolidi ſolo in quei ſolidi Regolari, de' quali gli anguli ſian compreſi da ſoli tre anguli piani relativamente eguali, negli altri ſi dimoſtrerà.

COROLLARIO I.

§. 4. Dovendoſi ogni angulo ſolido formar almeno da tre anguli piani, la ſumma de' quali fuſſe minore di quattro anguli retti; fu quindi giuſtamente dedotto, che da ſoli trilateri, quadrilateri, e pentilateri regolari poſſan terminars' i Solidi Regolari; e poichè de' trilateri regolari le ſumme di tre, quattro, e cinque anguli non giungono a quattro retti; de' quadrilateri e pentilateri le ſole ſumme di tre; fu quindi ulteriormente dedotto, cinque ſolo eſſer le ſpecie de' Solidi Regolari, tre delle quali ſono terminate da trilateri, che ſi uniſcono, o a tre, o a quattro, o a cinque in ogni angulo, e nel primo caſo, in cui tali trilateri ſon quattro formano un Solido detto Tetraedro, o ſia Piramide

mide Regolare, nel ſecondo, in cui ſon otto, formano un Solido detto Otraedro, nel terzo, in cui ſon venti, un Solido detto Icoſaedro, la quarta ſpecie è terminata da ſei quadrati, che formano un Solido detto Cubo, la quinta finalmente da dodici pentugoni, che formano un Solido detto Dodecaedro.

COROLLARIO II.

§. 5. Poichè ne' Solidi terminati da piani il numero de' lati è la metà del numero de' lati di tutt' i piani d'ognuno; giacchè in eſſi ogni lato non è, che l'interſezione di due piani, (che ſaran perciò detti aderenti) de' quali ſi dirà baſe comune; perciò i lati della Piramide ſaran ſei; quelli dell' Ottaedro, e del Cubo dodici, e quelli dell' Icoſaedro e Dodecaedro trenta.

COROLLARIO III.

§. 6. Così parimente, perchè per la ſteſſa ragione il numero de' lati convenut'in ogni angulo ſolido eguaglia quel-

lo

lo degli anguli piani del medesimo; perciò converranno in ogni angulo solido della Piramide, del Cubo, del Dodecaedro tre lati; quattro in ogni angulo dell' Ottaedro; e cinque in fine in ogni angulo dell' Icosaedro.

DEFINIZIONE II.

§. 7. Potrà perciò dirsi nella Piramide, nel Cubo, nel Dodecaedro ogni lato insistere nel piano, che passa per gli altri due, ed all' angulo, che comprendono; ed ad ogni lato in entrambi le sue estremità insisterne altri quattro.

DEFINIZIONE III.

§. 8. Saran detti in tutti i Solidi Regolari anguli contigui quelli, che ànno un lato comune, che si dirà tramezzarli; quindi nella Piramide, nel Cubo, nel Dodecaedro ogni angulo ne avrà altri tre contigui; quattro ne saran contigui ad ogni angulo dell' Ottaedro; e cinque in fine ad ognuno dell' Icosaedro (§ 6).

DEFINIZIONE IV.

§. 9. Si dirà centro de' piani terminanti un Solido Regolare quello, ch' è centro del cerchio circoſcrittibile, ed iſcrittibile in eſſi; e così le rette, che l' uniſcono cogli anguli, o che da eſſo calanſi ai ſuoi lati perpendicolari ſono eguali, e ſaran dette ragi di circoſcrizione, e d' iſcrizione.

AVVERTIMENTO.

§. 10. Ne' rettilinei regolari il centro del cerchio circoſcrittibile è, come s' è ſuppoſto, lo ſteſſo, che quello dell'iſcrittibile; imperciocchè le normali calate da D (*fig.* 1.) centro del cerchio circoſcrittibile al regolare rettilineo ABC ne' ſottopoſti lati dividono queſti *bifariam*, ed eſſendo così il quadrato di ciaſcuna di eſſe la differenza de' quadrati fatti in uno degli eguali ragi di circoſcrizione, ed in uno degli eguali ſemilati, ſono eguali.

CO-

COROLLARIO I.

§. 11. Poichè ne' rettilinei regolari le perpendiculari calate dal centro ne' ſottopoſti lati, cioè i di loro ragi d'iſcrizione, ne incontrano il punto medio di eſſi; perciò 1.°, facendo lo ſteſſo le altezze tanto nel triangulo equilatere, quanto nel pentagono regolare, paſſaranno queſte pel centro, e non ſaranno, che l'aggregato del ragio di circoſcrizione, e d'iſcrizione del rettilineo riſpettivo: 2.° le rette, che in eſſi uniſcono il centro co' punti medii de' lati ſono a queſti perpendiculari, e ſono eguali.

COROLLARIO II.

§. 12. Poichè agli eguali, e ſimili rettilinei regolari ſono circoſcrittibili, ed iſcrittibili eguali cerchj; perciò 1.° de' rettilinei regolari terminanti un Solido regolare ſaranno egual'i ragi di circoſcrizione, e d'iſcrizione. 2.° degli eguali pentagoni regolari ſaran eguali le altezze (§ pr)

co-

COROLLARIO III.

§. 13. Poichè ne' ſimili rettilinei regolari i trianguli BDE CEF (*fig.* 1. *e* 2.) che fanno ne' ſemilati di eſſi i riſpettivi ragi di circoſcrizione, e d' iſcrizione, ſono equianguli, avendo gli anguli in E, ed F retti, e quelli in B e C eguali, perchè la metà di quelli de' rettilinei ſteſſi; ſaran perciò in eſſi, come i lati i ragi di circoſcrizione, e d' iſcrizione.

DEFINIZIONE V.

§. 14. Sarà detta corda di un Solido Regolare la retta, che uniſce in eſſo due centri di due ſuoi piani aderenti.

COROLLARIO.

§. 15. Quindi, perchè ne' Solidi terminati da piani ogni piano a tanti ne aderiſce, quanti ſono i ſuoi lati (§ 5); ſi avrà perciò il numero delle corde, che poſſono aver luogo in un Solido Regolare dalla metà del prodotto dal numero de'

ſuoi

ſuoi piani in quello de' lati di uno di eſſi; ſicchè in ognuno eguaglieranno il numero de' lati, che dallo ſteſſo calculo ſi ottiene (§ 5). E perciò ſaran queſte ſei nella Piramide, 12. nell'Ottaedro, e nel Cubo, 30. nel Dodecaedro, ed Icoſaedro.

DEFINIZIONE VI.

§. 16. In un Solido Regolare ſe ne dirà iſcritto un altro, ſe abbia queſto tutt'i ſuoi angul' in tutti i piani di quello, che ſe li dirà circoſcritto.

DEFINIZIONE VII.

§. 17. Sarà detto centro di un Solido Regolare quel punto, che ſarà in ciaſcun di eſſi dimoſtrato equidiſtante dagli anguli, dai piani, e dai lati dello ſteſſo; e ſarà perciò detta ſemiaſſe di circoſcrizione quella retta, che unisce quel punto con uno de' ſuoi anguli, perchè ſemiaſſe della ſfera allo ſteſſo ſolido circoſcrittibile; e ſemidiametro d' iſcrizione (per diſtinguerla dal ſemiaſſe anche ſenza l'aggiunta) quella, che da eſſo ca-

laſi

lasi ad uno de' suoi piani normale ; perchè semidiametro della sfera allo stesso iscrittibile.

DEFINIZIONE VIII.

§. 18. Il rettilineo, che danno in un Solido gli uniti estremi de' lati convenuti nello stesso solido angulo di esso , si dirà per rapporto del Solido *interno*, potendo meritar il nome di esterno ogni rettilineo terminante il solido stesso; e si dirà *sottoposto* per rapporto dell' angulo stesso del solido, cui è sottomesso.

AVVERTIMENTO I.

§. 19. Quantunque gl' interni rettilinei de' Solidi Regolari siano, a suo luogo, dimostrati piani regolari , pure per ora con tal nome di rettilineo non dev' intendersi un piano rettilineo, ma un annulare congiungimento di rette.

COROLLARIO I.

§. 20. Ne' solidi terminati da triangusi sono i lati stessi del Solido , ch' esibiscono

ſcono gl' interni di loro rettilinei, negli altri ſon le ſotteſe agli anguli piani terminanti lo ſteſs' angulo del Solido.

COROLLARIO II.

§. 21. In sì fatti rettilinei dunque il numero de' lati eguaglierà quello degli anguli piani comprendenti l' angulo ſolido, cui ſon ſottopoſti; e perciò quadrilatere ſarà ogn' interno rettilineo dell'Ottaedro, triangulo ognuno del Cubo, e del Dodecaedro, pentilatere in fine ognun dell' Icoſaedro; nella Priramide poi gli eſterni ſono anche in luogo d' interni rettilinei. E così per l' oppoſto ſi avrà il numero degli anguli piani, che comprendono un angulo ſolido dal numero de' lati del ſuo ſottopoſto rettilineo.

COROLLARIO III.

§. 22. Nel Cubo, e Dodecaedro gl'interni rettilinei, perchè triangolari (§ pr) ſon piani rettilinei.

AVVERTIMENTO II.

§. 23. Gli anguli di sì fatti rettilinei passando per gli estremi de' lati del Solido, saranno negli anguli stessi del Solido, e negli Ottaedri ed Icosaedri, perchè terminati da trianguli, saranno ivi compresi dai lati stessi del Solido (§ 20); da quelli però, che non appartengono allo stess'angulo degli esterni piani di esso.

DEFINIZIONE IX.

§. 24. In ciascun Solido Regolare comprendente interni rettilinei, si diranno angulari piramidi quelle, che sono esibite da ciascun di loro angulo solido col sottoposttogli rettilineo; queste perciò saranno triangulari nel Cubo, e Dodecaedro, quadrilateri nell' Ottaedro, e pentilateri nell' Icosaedro: dal che ogn'interno rettilineo del Solido Regolare sarà anche detto base dell'angulare piramide, che taglia dal Solido.

DEFINIZIONE X.

§. 25. Si dirà equilatere quel Solido, di cui i lati ſian tutti retti eguali.

COROLLARIO I.

§. 26. Del Solido equilatere ſono i piani aſſolutamente e relativamente equilateri.

COROLLARIO II.

§. 27. I Solidi Regolari ſon tutti equilateri (§ 1).

PROPOSIZIONE.

§. 28. *Son tutti aſſolutamente e relativamente equilateri gl' interni rettilinei d' ogni Solido Regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I piani terminanti qualunque Solido Regolare ſon tutti regolari, ſimili, ed eguali (§ 1); dovendo dunque ne' ſolidi

anguli d' ogni Solido Regolare convenir gli anguli di sì fatti rettilinei, saranno tutt' eguali le sotteſe a queſti anguli; e perciò saran tutti assolutamente e relativamente equilateri gl' interni rettilinei d' ogni Solido Regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 29. Gl' interni rettilinei del Cubo, e Dodecaedro sono non solo in un piano (§ 23); ma regolari, ed eguali.

COROLLARIO II.

§. 30. Le angulari piramidi dello stesso Cubo, o dello stesso Dodecaedro son simili, ed eguali; e solo simili quelle de' Cubi, o Dodecaedri di lati ineguali.

CAPO

CAPO II.

Della Piramide Regolare.

DEFINIZIONE I.

§. 31. LA Piramide Regolare (che ſarà ſpeſſo diſegnata col ſolo nome di Piramide) è quel Solido Regolare terminato da quattro trianguli, e perciò regolari, ed eguali, così diſpoſti, che in ogni ſuo angolo ſolido convengano tre anguli de' ſuoi trianguli; meriterà dunque tal nome quella Piramide triangulare, i di cui trianguli ſono equilateri.

DEFINIZIONE II.

§. 32. Sarà detta aſſe della Piramide quella retta, che uniſce il vertice d' un ſuo angolo col centro del triangulo oppoſto; dal che non ſaranno, che quattro gli aſſi della Piramide.

DEFINIZIONE III.

§. 33. Ogni retta, che unisce i punti medii di due lati convenuti nello stess'angulo della Piramide sarà detta Ottaedrale.

PROPOSIZIONE I.

§. 34. *Nella Piramide gli assi sono ai suoi piani normali, e sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 2. Nella Piramide ABCD sia calato l'asse AE, e sia il centro E unito ai punti B C D.

I. I trianguli AEB AEC AED come fatti dal comune AE, da tre lati della stessa piramide, e tre raggi dello stesso triangulo son relativamente equilateri, e perciò anche relativamente equianguli; eguali son dunque i diloro anguli in E opposti agli eguali lati; e perciò l' asse AE è normale al sottoposto triangulo; locchè avendo sempre luogo, saranno nella Piramide gli assi ai suoi piani normali.

II.

II. Dal che il quadrato d'ogni asse della Piramide è la differenza de'quadrati di un suo lato, e di un suo ragio triangulare di circoscrizione; ma sono in essa eguali i primi, ed i secondi (§ 12); dunque gli asi nella Piramide sono ai suoi piani normali, e sono eguali. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 35. Nelle Piramidi Regolari le altezze sono lo stesso, che gli asi; ma nelle Piramidi simili, e similmente poste, come sempre son le Piramidi Regolari, le altezze son come i lati; dunque sono nelle Piramidi Regolari gli asi, come i lati.

COROLLARIO II.

§. 36. I trianguli dunque, che nascono sia nella stessa, sia in diverse Piramidi Regolari tra un asse, un lato, e'l ragio corrispondente son terminati da lati proporzionali (§ 13), e perciò saranno nelle Piramidi eguali gli angoli, che nascono in esse tra gli asi, ed i lati assolutamente, e relativamente.

LEMMA I.

§. 37. *Nel triangulo equilatere il ragio di circoſcrizione è a quello d'iſcrizione, come* 2 : 1.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 1. Sia D centro del triangulo equilatere ABC, e ſia in queſto calata l' altezza AE, la quale paſſerà per D (§ 12), e ſiano in fine uniti i punti DB DC.

Eſſendo per ipoteſi D centro del triangulo ABC; faranno i trianguli ADB BDC CDA relativamente equilateri, e perciò eguali; ſarà dunque l'intero triangulo ABC alla ſua parte BDC come 3 : 1.; ma ànno queſti la ſteſſa baſe; ſarà dunque anche l'altezza del primo a quella del ſecondo, cioè AE a DE come 3 : 1.; e perciò AD : DE, cioè il ragio di circoſcrizione a quello d'iſcrizione (§ 11) come 2 : 1. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 38. Nel triangulo dunque equilatere l'altezza ſta al ragio di circoſcrizione, come 3 : 2, a quello d'iſcrizione, come 3 : 1.

LEMMA II.

§. 39. *Nella Piramide ogni corda è parallella ad un ſuo lato, ed è la terza parte del medeſimo.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Piramide ABCD ſia tirata la corda qualunque EF, e dagli anguli BC oppoſti ai piani, de' quali quella corda uniſce i centri nel lato AD, che quelli ſteſſi piani tramezza ſiano calate due perpendiculari, queſte dovranno convenire nel ſuo punto medio M (§ 11), e paſſare per gli riſpettivi centri. Fig. 3.

I. Nel triangulo BMC la corda EF ne à diviſi i lati BM. CM proporzionatamente (§ 37); è dunque parallell'a BC.

II. E così ſarà BC : EF :: BM : ME;

ma

ma BM : ME :: 3 : 1 (§ pr.) dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 40. Nella Piramide le corde ſon tutt' eguali, e ſono nelle Piramidi le corde, come i lati.

COROLLARIO II.

Fig. 4. §. 41. Se nella Piramide ABCD ſi uniſcano tre centri de' ſuoi trianguli E F G ſi avrà un triangulo equilatere EFG ; e così, perchè equilateri anche ſaranno, per la ſteſſa ragione i trianguli, che formano ne' lati di queſto le altre tre corde, che tiranſi dal quarto centro H agli ſteſſi centri E F G, agli anguli, cioè, del primo triangulo ; perciò, tirate nella Piramide tutte le corde, naſcerà in eſſa un altra regolare Piramide, che avendo tutt' i ſuoi anguli in tutt' i piani di quella, meriterà dirs' iſcritta in eſſa ; e ſarà alla ſteſſa, come i Cubi di 1 : 3.

AVVERTIMENTO.

§. 42. Di due rette parallelle poſſon diſtinguerſi gli eſtremi corriſpondenti, e gli eſtremi alterni; i primi ſon quelli, che unitiſi con altre rette, formaſi da queſte colle parallelle un piano quadrilineo; i ſecondi ſon quelli, le rette de' quali ſono le diagonali di un sì nato quadrilineo; quindi poichè le diagonali di qualunque piano quadrilineo s' interſegano; ſarà vero, che le rette, che uniſcono gli eſtremi alterni di due parallelle debbano interſegarſi.

PROPOSIZIONE II.

§. 43. *Nella Piramide gli aſſi s' interſegano nel medeſimo punto, ed è queſto il ſuo centro.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Piramide ABCD ſiano tirati gli aſſi BF CE, e la corda EF. Fig. 3.

I. Eſſendo la corda EF parallell'a BC

(§ 39)

(§ 39), ed unendo gli eſtremi alterni di queſte gli aſſi BF CE, dovranno queſti interſegars' in un punto O (§ prec.), e dovranno così formare in BC, ed EF i trianguli BOC EOF equianguli; ficchè ſarà tanto BO ad OF, quanto CO ad OE, come il lato BC alla corda EF; ma per la ſteſſa ragione deve lo ſteſſo aſſe BF non ſolo interſegarſi cogli altri due aſſi, che calanſi dagli altri due anguli A D, ma deve bensì reſtare in ciaſcuno la parte verticale a quella verſo il piano, come il lato alla corda della ſteſſa piramide; nella Piramide dunque tutti gli aſſi s' interſegano nel medeſimo punto.

II. Eſſendo nella Piramide gli aſſi eguali, ed ai riſpettivi piani normali (§ 34), e dividendoſi così tutt'in O, che ne reſti ogni ſegmento verticale all'altro verſo il piano, come il lato alla corda; ſarà quel punto, in cui gli aſſi s'interſegano equidiſtante dagli anguli, e dai piani; ma equidiſta parimente dai lati, imperciocchè calata ſu qualunque lato BC la perpendicolare ON queſta dovrà incontrarne il punto medio N, eſſendo OBC iſoſcele, e dovrà così il quadrato di eſſa, o di

ogni

ogni altra ſimile, eguagliar la differenza de' quadrati di un egual ſemiaſſe di circoſcrizione, e di un egual ſemilato; il punto dunque, in cui gli aſſi s' interſegano è il centro della Piramide, e perciò &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§.44. Nella figura additata nel piano ſi ſcorgerà poco volentieri la neceſſità di doverſi BF interſegare anche cogli altri due aſſi calati dagli altri due anguli A, D; ma queſto ſi deduce francamente dal riflettere, ch' eſſendo nella Piramide quattro gli anguli, ed avendone ognuno altri tre contigui, e così quattro i piani, ed avendone ognuno altri tre aderenti, due qualunque aſſi della Piramide abbiano ſempre ne' di loro eſtremi verticali un lato comune, negli altri verſo i piani una corda a quel lato parallella.

COROLLARIO I.

§. 45. Avendo veduto BO : OF : : BC : EF, ſarà nella Piramide il ſemiaſſe al

al ſemidiametro, come il lato alla corda, cioè, come 3 : 1 (§ 39); e ſarà perciò la ſfera circoſcritt' all' iſcritt' alla ſteſſa Piramide, come i Cubi di 3 : 1 (§ 17).

COROLLARIO II.

§. 46. Sicchè nelle Piramidi Regolari gli aſſi paſſan pel centro, e reſtan da eſſo diviſi in un ſemiaſſe, ed un ſemidiametro; e ſta ogni aſſe al primo come 4: 3, al ſecondo, come 4 : 1; e perciò ſarà l' aſſe della Piramide a quello della Sfera circoſcrittali, come 4 : 6 = 2 : 3 a quello della ſfera iſcrittali, come 4 : 2 = 2 : 1.

COROLLARIO III.

§. 47. La Sfera iſcritta nella Piramide incontra i ſuoi piani tutti nel centro; e così circoſcrive nel tempo ſteſſo la piramide in quella iſcritta, cioè che naſce in eſſa tirate le ſue corde (§ 41); ſarà dunque la Piramide circoſcritta all'iſcritta alla ſteſſa ſfera, come la Sfera circoſcritt' all' iſcritt' alla ſteſſa piramide (§ 45); e ſaranno quell'e queſte tra loro, come i Cubi di 3 : 1 = 27 : 1 (§ 41).

CO-

COROLLARIO IV.

§. 48. Essendo nelle Piramidi tutt' i trianguli nati, come BOC da due semiassi, ed un lato corrispondente equianguli, avendo ognuno due anguli nati dall' insistenza degli assi ne' rispettivi lati (§ 36); saranno nelle Piramidi, come i lati i semiassi; ma son come i lati gl' interi assi; saranno dunque anche, come i lati i semidiametri; e perciò saranno le Piramidi, come le Sfere circoscritte, ed iscritte in esse (§ 17).

COROLLARIO V.

§. 49. Incontrando le perpendiculari, calate dal centro della Piramide nei suoi lati, questi tutti nei di loro punti medii; sarà nella Piramide il centro da questi punti equidistante.

AVVERTIMENTO.

§. 50. Siccome ne' trianguli equilateri il centro ne divide l' altezza ne' ragi del cerchio

cerchio circoſcrittibile, ed iſcrittibile in eſſo; così nelle Piramidi Regolari il centro ne divide le altezze ne' ragi della sfera circoſcrittibile, ed iſcrittibile in eſſa.

PROPOSIZIONE III.

§. 51. *Nella Piramide il quadrato del lato è a quello dell' aſſe, come* 3 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 2. Nella Piramide ABCD ſia calato l'aſſe AE, e dai punti AE ſiano calate ſu lo ſteſſo CD due perpendiculari, queſte dovendo entrambi dividere bifariam CD (§ 11), converranno nel ſuo punto medio F.

Per la coſtruzione ADq = AFq + FDq; ma ADq : DFq :: 4 : 1; dunque ADq : AF :: 4 : 3 = 12 : 9; ma eguagliando per la ſteſſa coſtruzione AFq i quadrati di AE, ed EF (§ 34), ed eſſendo AFq : FEq :: 9 : 1, (§ 38) ſarà AFq : AEq :: 9 : 8; dunque il quadrato del lato AD è al quadrato dell' aſſe AE, come 12 : 8 = 3 : 2. C. D. D.

co-

COROLLARIO I.

§. 52. Se il quadrato del lato è a quello dell'asse come $3 : 2 = 24 : 16$; quello dell'asse a quello del semiasse di circoscrizione come $16 : 9$ (§ 46); sarà nella Piramide il quadrato del lato a quello del semiasse di circoscrizione, cioè a quello del ragio della Sfera ad essa circoscrittibile (§ 17) come $24 : 9 = 8 : 3$; potrà dunque dirs' il lato della Piramide maggior del ragio della Sfera circoscrittibile ad essa.

COROLLARIO II.

§. 53. Se sta il quadrato del lato a quello del semiasse di circoscrizione, come $8 : 3$ (§ pr.) sarà a quello dell'intero asse di circoscrizione come $8 : 12 = 2 : 3$; dal che sarà nella Piramide il lato media proporzionale tra l'asse suo, e quello della sfera circoscrittali, siccome cioè il lato del triangulo equilatere è media proporzionale tra la sua altezza, e 'l diametro del cerchio circoscrittoli.

COROLLARIO III.

§. 54. Se ſta il quadrato del lato a quello dell' aſſe, come 3 : 2 = 24 : 16, quello dell' aſſe a quello del ſemidiametro d'iſcrizione come 16 : 1 (§ 46); ſarà quello del lato a quello del ſemidiametro, come 24 : 1; e perciò ſarà a quello dell'intero diametro, come 24 : 4 = 6 : 1.

LEMMA.

§. 55. *Nella Piramide ogni Ottaedrale è la metà del ſuo lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 5. Nella Piramide ABCD ſia tirata l'Ottaedrale EF.

Queſta tagliando i lati AB AC del triangulo ABC proporzionalmente (§ 33) ſarà parallell' a BC, e così tagliarà dal triangulo ABC l'altro ſimile AEF; ſarà dunque la ottaedrale EF eguale ad AE metà del lato della Piramide. C. D. D.

CO-

COROLLARIO I.

§. 56. Le Ottaedrali ſon tutt'eguali; e perciò quelle, che uniſcono i punti medii de' lati appartenenti allo ſteſs' angulo A della Piramide chiudono un triangulo equilatere, EFG, il quale terminandoſi da lati parallelli a BC CD DB ſarà parallello al triangulo della Piramide BCD, e perciò tagliarà da eſſa un' altra piramidetta, che diraſſi angulare, a quella ſimile, e perciò regolare, e l' ottava ſua parte.

COROLLARIO II.

§. 57. Equilatere parimente ſarà quel triangulo, che chiudono quelle Ottaedrali, che uniſcono i punti medii E F H de'lati dello ſteſſo triangulo ABC della Piramide.

COROLLARIO III.

§. 58. Tirate dunque nella Piramide tutte le Ottaedrali vengon queſte a tagliar da eſſa quattro regolari, ed eguali piramidette angulari, che in tutto compren-

dono la metà della ſua ſolidità (§ 56); e così viene a reſtar l'altra metà di eſſa in un ſolido terminato da otto eguali, e regolari trianguli, quattro nati ſotto i quattro ſuoi anguli, e quattro ne' quattro ſuoi piani.

PROPOSIZIONE IV.

§. 59. *Il Solido, che naſce nella Piramide, tirate in eſſa tutte le Ottaedrali è un Ottaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nella Piramide le Ottaedrali, e così tagliateſi da eſſa le ſue angulari piramidette, reſta di eſſa un Solido terminato da otto regolari, ed eguali trianguli (§ prec.); ma ſon queſti così diſpoſti, che in ſei punti (quanti, cioè, ſono i lati della Piramide, gli anguli dell' Ottaedro) poggino i diloro anguli, ed in ogni punto ne convengano quattro; due, cioè, di quelli nati ſotto gli anguli, che ogni lato tramezza (§ 8); e due in quei piani, ai quali ogni lato appartiene (§ 5);

tirate

tirate dunque nella Piramide le Ottaedrali, il Solido, che naſce in eſſa è un Ottaedro, C. D. D.

COROLLARIO.

§. 60. La Piramide ſta all' Ottaedro, che così naſce in eſſa, come 2 : 1 (§ 58).

PROPOSIZIONE V.

§. 61. *La Piramide ſta all'Ottaedro di lati eguali, come* 1 : 4.

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nella Piramide le Ottaedrali naſcon da eſſe, e perciò di lati eguali, le regolari piramidette angulari, l'Ottaedro (§ 59); ma ciaſcuna di quelle ſta alla Piramide intera, come 1 : 8 (§ 56); la Piramide intera a quell' Ottaedro, come 8 : 4 (§ pr.); la Piramide dunque ſta all'Ottaedro di lati eguali, come 1 : 4. C. D. D.

CAPO III.

Dell' Ottaedro.

DEFINIZIONE I.

§. 62. L'Ottaedro è quel Solido Regolare terminato da otto trianguli, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che da quattro de' di loro anguli si comprenda ogni solido suo angulo.

COROLLARIO.

§. 63. Gli anguli solidi dell' Ottaedro son sei, essendo ventiquattro i suoi anguli piani.

AVVERTIMENTO.

§. 64. Quantunque sian sei gli anguli solidi dell' Ottaedro, gl'interni suoi quadrilinei non sono, che tre, essendone ognun

ognun ſottopoſto a due de' ſuoi anguli, che ſi diranno oppoſti.

DEFINIZIONE II.

§. 65. Lati oppoſti nell' Ottaedro ſi diran quelli, che ſono oppoſti negli interni ſuoi quadrilinei.

AVVERTIMENTO.

§. 66. Poichè nell' Ottaedro ſi moſtreran parallell' i lati oppoſti, potranno in eſſi notarſi gli eſtremi corriſpondenti, ed alterni; e potran perciò dirs' in eſſo

DEFINIZIONE III.

§. 67. Anguli oppoſti quelli, ne' quali ſono gli eſtremi alterni de' lati oppoſti.

COROLLARIO.

§. 68. Nell' Ottaedro a due ſuoi anguli contigui debbon opporſene altri due anche contigui, ed eſſer oppoſt' i lati, che li tramezzano; e così parimente a

tre ſuoi anguli annularmente contigui; quali ſon quelli, ne' quali ſon gli anguli dello ſteſſo triangulo, debbon opporſene altri tre anche annularmente contigui, cioè ne' quali anche ſian gli anguli d'un iſteſſo triangulo, ed i lati del primo triangulo debbon opporſi a quelli del ſecondo; onde potran dirſi nell' Ottaedro

DEFINIZIONE IV.

§. 69. Trianguli oppoſti, quelli, che ſon terminati da lati relativamente oppoſti.

DEFINIZIONE V.

§. 70. Aſſi nell'Ottaedro ſon le rette, che uniſcono due ſuoi anguli oppoſti.

COROLLARIO I.

§. 71. Gli aſſi nell'Ottaedro uniſcono gli eſtremi alterni de' ſuoi lati oppoſti, e perciò non ſono, che le diagonali degli interni ſuoi quadrilinei (§ 65).

COROLLARIO II.

§. 72. Essendo nell'Ottaedro sei i suoi anguli (§ 63), ed avendone ognuno quattro contigui (§ 8), e perciò non altro, che uno opposto; saranno nell' Ottaedro tre sol' i suoi assi.

COROLLARIO III.

§. 73. Ma ne' tre quadrilinei dell'Ottaedro dovrebbero aver luogo sei diagonali; è necessario dunque, che nell' Ottaedro i suoi quadrilinei si seghino per le diagonali, onde resti ogni diagonale a due di essi comune; e così tre assi occupino il luogo di sei diagonali.

PROPOSIZIONE I.

§. 74. *L'Ottaedro comprende un punto equidistante dagli anguli, dai piani, dai lati.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 6. Sia ABCD un quadrato, ed in esso sian tirate le diagonali AC BD, e dal punto O, in cui queste s'intersegano sia eretta la normale OE eguale alla semidiagonale OA, e sia in fine unito il punto E co' punti A B C D.

Il quadrato di AE eguagliando per la costruzione gli eguali quadrati di AO EO, sarà il doppio del quadrato di AO; ma è doppio dello stesso, per la stessa costruzione il quadrato di AB; dunque AE è eguale ad AB; nella stessa maniera si mostra BE CE DE eguale alla stessa AB; dunque son tutti egual' i lati della quadrata piramide EABCD, e perciò ne sono i trianguli tutti equilateri, ed eguali; se dunque si ripeta al disotto dello stesso quadrato ABCD la stessa costruzione si vedrà sorgere un Solido terminato da otto eguali trianguli equilateri così combinati, che da quattro anguli di questi sia compres'ogni angulo del Solido; si vedrà dunque sorgere un Ottaedro, nel quale il punto O, in cui le diagonali

del

del quadrato ABCD s'interſegano è quello, che ſi moſtrerà equidiſtante dagli anguli, dai piani, dai lati.

I. Eſſendo nel quadrato eguali le diagonali, ed interſegandoſi *bifariam*; ſarà il punto O equidiſtante dai quattro anguli A B C D; ma lo è egualmente diſtante per la ſteſſa coſtruzione dagli altri due; lo è dunque dagli anguli tutti.

II. Se queſto ſteſſo punto ſi creda unito co' centri de' trianguli tutti dell' Ottaedro, ſi troverà ciaſcuna di sì fatte rette al ſuo riſpettivo piano normale, come nel (§ 34); e così ſi vedrà, che fia il quadrato di ognuna di eſſe la differenza de' quadrati fatti in uno degli eguali ſemiaſſi di circoſcrizione, ed in uno degli eguali ragi triangulari di circoſcrizione, ſi vedranno dunque tutte sì fatte normali eguali; e perciò quel punto, in cui quelle diagonali s'interſegano equidiſta anche dai piani tutti dell' Ottaedro.

III. Ma ſe lo ſteſſo punto, ſi creda unito co' punti medii dei lati dell' Ottaedro, ſi troverà ciaſcuna di sì fatte rette al corriſpondente lato perpendicula-

re,

re, e la differenza de' quadrati di uno degli eguali ſemiaſſi, e di uno degli eguali ſemilati dell' Ottaedro; l'Ottaedro dunque comprende un punto equidiſtante dai ſuoi anguli, dai piani, dai lati. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 75. Lo ſteſſo può moſtrarſi nell'Ottaedro, che naſce nella Piramide dalle Ottaedrali; giacchè racchiude queſto il centro della Piramide, ch' equidiſtando dai punti medii de' ſuoi lati (§ 49) equidiſta dagli anguli dell'Ottaedro; e quindi ſiegue il reſto, come nella precedente.

COROLLARIO I.

§. 76. L' Ottaedro è circoſcrittibile, ed iſcrittibile alla Sfera.

COROLLARIO II.

§. 77. La Sfera, che s' iſcrive nell' Ottaedro incontra i ſuoi piani tutti nel centro.

CO-

COROLLARIO III.

§. 78. Se l' Ottaedro, che naſce nella Piramide dalle Ottaedrali à comune con quella il ſuo centro, comuni quattro centri de' piani, ſarà quello circoſcrittibile alla ſteſſa Sfera, che queſta.

LEMMA I.

§. 79. *Se ad una Sfera, che tocca un piano ſi faccia una ſezione al piano parallella, tutte le rette, che tiranſi dal punto del contatto alla periferia della ſezione ſono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera ABC, che tocca il piano MN nel punto B ſia fatta la ſezione ADC parallella ad MN. Si uniſch' il punto B con O centro della Sfera, e ſi prolunghi BO, ſe ſia neceſſario, finchè incontri il piano della ſezione in P. Si prendano finalmente nella periferia della ſezione ad arbitrio quali ſi vogliano punti Fig. 7.

ADC,

A D C, e ſi uniſcano con B, e P.

Eſſendo PB normale ad MN ſarà parimente normale al piano della ſezione, ch'è parallello per la coſtruzione ad MN; dunque i trianguli APB DPB CPB ſon rettangul' in P, e perciò ſono egual' i quadrati, e così le rette AB DB CB, com' eguali alle eguali ſumme de' quadrati di AP PB, DP PB, CP PB; e perchè va lo ſteſſo di tutte le altre, che poſſon tirarſi da B agli altri punti della periferia ADC, ſarà ſempre vero ciocchè. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 80. Una retta ſi dirà adattata nella Sfera, ſe pogg' in eſſa i ſuoi eſtremi.

LEMMA II.

§. 81. *Se qualunque numero di rette eguali ſiano così adattate in una Sfera, che ne ſiano convenuti gli eſtremi di una banda in un punto, gli eſtremi oppoſti ſaranno nella periferia della ſteſſa ſua ſezione.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera ABC ſia adattato qualunque numero di rett' eguali convenute da una banda in qualunque ſuo punto B. Si faccia collo ſteſſo punto poggiar la Sfera ſul piano MN; e ſi faccia dal punto A, in cui qualunque delle rette adattate poggia l'altro eſtremo una ſezione ADC parallell'ad MN; nella periferia di queſta ſi troveranno tutti gli altri eſtremi delle rette adattate. Fig. 7.

Negandoſi, ne cada una, ſe ſia poſſibile, nel punto X al di ſopra di detta periferia, e ſi uniſchi XQ; pel piano del triangulo BXQ ſi faccia una ſeconda ſezione, che taglia la prima ADC in YZ, e ſi uniſchi BY; ciò fatto, la Sezione BXQ paſſando per BQ diametro della Sfera, farà un ſuo cerchio maſſimo, di cui perciò ſarà diametro la ſteſſa BQ, e l'altre due BX BY due ſue qualunque ſecanti nello ſteſſo ſemicerchio, e perciò una più, l'altra meno vicin'al diametro; ſaranno dunque ineguali; ma BX eſſendo per l'ipoteſi eguale a BA ſarebbe anche

eguale

eguale a BY (§ pr); è falso dunque, che sia il punto X al di sopra della periferia ADC; ma lo stesso va detto, facendolo cadere al di sotto; restando sempre delle due secanti una più, l'altra meno vicin' al diametro, e lo stesso va detto d'ogni altra; caderanno dunque tutte nella stessa periferia DAC. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 82. Delle rett'eguali adattate nella Sfera, e convenute da una banda nello stesso punto di essa, gli estremi dell'altra banda sono nello stesso piano; ed ove di esse unisconsi gli estremi successivi, si avrà un rettilineo iscrittibile al cerchio.

COROLLARIO II.

§. 83. D'ogni Solido equilatere, ed iscrittibile alla sfera, saranno gli estremi de' lati convenuti nello stess' angulo solido di esso nello stesso piano; e saran perciò gl'interni rettilinei dello stesso in un piano, ed iscrittibili al cerchio.

CO-

COROLLARIO III.

§. 84. Essendo l' Ottaedro equilatere (§ 27), ed iscrittibile alla Sfera (§ 7), saranno gl' interni suoi rettilinei in un piano, ed iscrittibili al cerchio.

LEMMA III.

§. 85. *Ogni rettilineo equilatero, ed iscrittibile al cerchio è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè iscritto questo nel cerchio, tagliando gli eguali suoi lati dal medesimo simili, ed eguali porzioni, saranno i suoi anguli da simili, ed eguali porzioni compresi; e perciò ogni rettilineo equilatere, ed iscrittibile al cerchio è anche equiangulo; è dunque regolare. C. D. D.

PROPOSIZIONE II.

§. 86. *Gl' interni rettilinei dell' Ottaedro son quadrati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son queſti quadrilateri (§ 21), ed equilateri (§ 28), ſono in un piano, ed iſcrittibili al cerchio (§ 84); ſon dunque quadrati (§ pr) C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 87. Son nell' Ottaedro paralleli i lati, ed i trianguli oppoſti.

COROLLARIO II.

§. 88. L' Ottaedro ſarà diviſo da ogni ſuo quadrato in due ſimili, ed eguali piramidi quadrate; ſicchè ſaran gli Ottaedri, come le di loro piramidi quadrate.

AVVERTIMENTO.

§. 89. Speſſo col ſolo nome di piramide quadrata ſi diſegnerà quella, ch' è metà dell' Ottaedro, cioè, di cui la baſe ſia quadrato i trianguli equilateri.

CO-

COROLLARIO III.

§. 90. I quadrati dell' Ottaedro ſon tutti eguali (§ 28).

COROLLARIO IV.

§. 91. Gli aſſi dell' Ottaedro ſon le diagonali de' ſuoi quadrati (§ 72), e perciò tutti eguali.

COROLLARIO V.

§. 92. Son negli Ottaedri gli aſſi come i lati.

PROPOSIZIONE III.

§. 93. *Gli aſſi nell' Ottaedro tutti s'interſegan bifariam, ed ad anguli retti nel medeſimo punto, ed è queſto il centro dell' Ottaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Eſſendo nell' Ottaedro gli aſſi diagonali de' ſuoi quadrati (§ 91), debbon

due di essi intersegarsi *bifariam*, ed ad anguli retti, perchè diagonali dello stesso quadrato; il terzo deve far con ciascuno de' primi lo stesso, e perciò nel medesimo punto, perchè con ciascuno di essi appartiene allo stesso quadrato(§ 73); tutti dunque gli assi dell'Ottaedro s'intersegan *bifariam*, ed ad anguli retti nel medesimo punto.

II. Il punto, in cui tutti gli eguali (§ 91) assi nell'Ottaedro, s'intersegan *bifariam* equidista da tutt'i suoi anguli; e si vedrà lo stesso equidistar anche dai piani, e dai lati come nel (§ 78); gli assi dunque nell' Ottaedro tutti s' intersegan *bifariam*, ed ad anguli retti nel medesimo punto, ed è questo il centro dell'Ottaedro C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 94. L' asse dell' Ottaedro è lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso; dal che siccome nell' Ottaedro il quadrato del lato è doppio di quello del suo semiasse, così sarà doppio di quello del ragio della Sfera circoscrittibile ad es-

so,

ſo; e così parimente ſiccome il quadrato del lato ſta a quello del ſuo aſſe, come 1 : 2, così ſarà a quello dell' aſſe della Sfera circoſcrittibile ad eſſo.

COROLLARIO II.

§. 95. Se ogni aſſe dell' Ottaedro è perpendiculare agli altri due, e nel punto, in cui quelli s' interſegano, ſarà ogni aſſe normale a quel quadrato, che paſſa per quelli; e perciò l' altezza d' ogni piramide quadrata dell' Ottaedro è un ſuo ſemiaſſe.

COROLLARIO III.

§. 96. Avendo veduta normale ad ogni triangulo dell' Ottaedro la retta, che unisce il centro del triangulo col centro dell' Ottaedro, ed eſſendo nell' Ottaedro parallell'i trianguli oppoſti, la retta, che nell' Ottaedro unisce i centri di due ſuoi trianguli oppoſti è ad entrambi normale, e paſſa pel centro dell' Ottaedro.

AVVERTIMENTO.

§. 97. Questa retta sarà detta diametro dell'Ottaedro, siccom'è diametro della Sfera iscrittibile in esso.

COROLLARIO IV.

§. 98. Essendo nell'Ottaedro parallell' i piani opposti, ed essendo il diametro ad entrambi normale sarà nell' Ottaedro il diametro lo stesso, che la sua altezza.

COROLLARIO V.

§. 99. Negli Ottaedri gli anguli, che fanno gli assi ne' rispettivi lati son tutti assolutamente, e relativamente eguali, perchè tutti semiretti.

COROLLARIO VI.

§. 100. Incontrando le normali calate dal centro dell'Ottaedro i suoi piani tutti nel centro; sarà nell' Otraedro il centro equidistante dai centri dei piani.

PROPOSIZIONE IV.

§. 101. *Gli Ottaedri ſono in ragion triplicata de' lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son gli Ottaedri, come le di loro piramidi quadrate (§ 88); ma queſte ſon anche relativamente ſimili, perchè terminate da egual numero di piani relativamente ſimili, e perciò in ragion triplicata de'lati, che non ſono, che i lati de'riſpettivi Ottaedri; ſon dunque gli Ottaedri in ragion triplicata de'lati. C.D.D.

PROPOSIZIONE V.

§. 102. *L'Ottaedro è alla Piramide in ragion compoſta dalla triplicata de' lati, e da quella di* 4 : 1.

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all'Ottaedro de' lati eguali, come 1 : 4 (§ 61); l'Ottaedro è

ad ogni altro Ottaedro, in ragion triplicata de' lati (§ pr) dunque la Piramide è a qualunque Ottaedro in ragion composta da quella di 1 : 4, e dalla triplicata de' lati; e perciò l'Ottaedro è alla Piramide, come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE VI.

§. 103. *Se s'intendano nell'Ottaedro tutti tirati i ſuoi aſſi, reſterà diviſo in otto piramidi triangulari ſimili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Figura ſolida. I. Gli aſſi nell'Ottaedro tutti s'interſegan nel centro, ed ànno gli eſtremi in tutt'i ſuoi anguli, e perciò in tutti gli anguli de' ſuoi trianguli, e queſti ſon otto (§ 62); tirati dunque nell'Ottaedro i ſuoi aſſi reſta diviſo in otto piramidi triangulari.

II., e III. Ciaſcuna di sì nate piramidi à per baſe un triangulo dell'Ottaedro, ed à ognuno de' trianguli ſuperiori fatto da un lato dell'Ottaedro, e due ſemiaſſi dello ſteſſo; ſono dunque tutte ſimili,

mili, ed eguali; e perciò, se s' intendano &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 104. L' altezza d' ogni sì fatta piramidetta è il semidiametro dell'Ottaedro.

COROLLARIO II.

§. 105. Dividendosi nell' Ottaedro gli assi *bifariam*, ed ad angoli retti (§ 93); saranno di sì fatte piramidette i triangoli superiori nel vertice rettanguli, ed isosceli, cioè simili a quelli, ne' quali vien diviso il quadrato dalla diagonale; sicchè, siccome l'Ottaedro è ottuplo d'ogni sua sì fatta piramidetta, potrà dirsi ottuplo della piramide, di cui la base sia un triangulo equilatere del suo lato, i trianguli superiori nel vortice rettanguli, ed isosceli; dal che sarà ogni sì fatta piramide, (cui sarà dato il nome di rettangula), alla piramide regolare del lato della sua base, come 1 : 2 (§ 61).

co-

COROLLARIO III.

§. 106. Essendo negli Ottaedri gli assi, e perciò anche i semiassi, come i lati (§ 92); saranno di sì fatte piramidette, anche appartenendo esse a diversi Ottaedri, simil'i trianguli superiori, dal che simili, anche relativamente saranno le triangulari piramidette degli Ottaedri.

COROLLARIO IV.

§. 107. E poichè delle piramidi simili, e similmente poste sono le altezze, come i lati, e di sì fatte piramidette, stando similmente poste, le altezze sono i semidiametri de' rispettivi Ottaedri (§ 104), saranno negli Ottaedri, come i lati i semidiametri, e perciò anche i diametri.

AVVERTIMENTO.

§. 108. Siccome tutti gli assi dividono l'Ottaedro in otto simili, ed eguali piramidi, così ogni solo suo asse lo divide in quattro, parimente simili, ed eguali,

guali, (come facilmente ſi avverte), delle quali perciò ciaſcuna eguaglierà la piramide Regolare del lato dell' Ottaedro (§ 61).

PROPOSIZIONE VII.

§. 109. *Son gli Ottaedri come le Sfere circoſcritte, ed iſcritte.*

DIMOSTRAZIONE.

Sono negli Ottaedri, come i lati gli aſſi i diametri (§§ 92 e 107), e ſono in eſſi gli aſſi, ed i diametri gli ſteſsi, che gli aſsi, e diametri delle Sfere circoſcritte, ed iſcritte in eſsi (§ 94 e 97); ſon dunque gli Ottaedri come le Sfere circoſcritte, ed iſcritte. C. D. D.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 110. *L' Ottaedro circoſcritto ſta all' Ottaedro iſcritto alla ſteſſa sfera, come la Sfera circoſcritta all' iſcritta allo ſteſs' Ottaedro.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

A B C D

Sia A un Ottaedro, B una sfera iscritta in A, C. un Ottaedro iscritto in B, e D una sfera iscritta in C.

Sono gli Ottaedri, come le sfere iscritte in essi (§ pr) dunque sarà A : C : : B : D; C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 111. *Nell' Ottaedro il quadrato del lato è al quadrato del diametro, come* 3 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all' Ottaedro di lati eguali, come 1 : 4 (§ 61) = 2 : 8; ma l'Ottaedro à alla sua piramidetta triangulare, come 8 : 1; dunque quella Piramide è a questa, come 2 : 1; ma dando a questa per base il triangulo dell'Ottaedro ànno entrambe dall' ipotesi eguali le basi; sarà dunque l' altezza della prima, cioè il suo asse (§ 35) doppia dell' al-

altezza della ſeconda, cioè del ſemidiametro dell'Ottaedro (§ 104); l'aſſe dunque della Piramide eguaglia il diametro dell' Ottaedro di lati eguali; e perciò ſarà il lato dell' Ottaedro al ſuo diametro, come quello della Piramide al ſuo aſſe; cioè ne ſaranno i quadrati, come 3 : 2 (§ 51) C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 112. Eſſendo nell' Ottaedro il quadrato dell'aſſe a quello del lato, come 2 : 1 = 6 : 3 (§ 91); ſarà quello dell' aſſe e quello del diametro, come 6 : 2 = 3 : 1.

COROLLARIO II.

§. 113. L' Ottaedro, e la Piramide di lati eguali ànno eguali le altezze, avendo veduto l' aſſe della Piramide eguale al diametro dell'Ottaedro di lati eguali; dal che ſarà 1.° l' Ottaedro quadruplo d'ogni piramide d' eguale baſe, ed altezza. 2.° Sarà al priſma d'eguale baſe, ed altezza, come 4 : 3. 3.° Sarà a qualunque priſma in ragion compoſta da quella delle baſi, da quella delle altezze, e da quel-

la

la di 4 : 3. 4°. Si avrà la ſolidità dell' Ottaedro dal fatto di un ſuo triangulo in quattro terze parti d' un ſuo diametro.

PROPOSIZIONE X.

§. 114. *Dell' Ottaedro circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa sfera ſono i quadrati de' lati, come* 3 : 1.

DIMOSTRAZIONE.

L' aſſe, e'l diametro dell'Ottaedro ſon gli aſsi delle Sfere circoſcritta, ed iſcritta in eſſo, ma ſon *potentia*, come 3 : 1 (§ 112); così ſon dunque gli aſsi delle sfere circoſcritta, ed iſcritta allo ſteſs' Ottaedro; ma ſta l'Ottaedro circoſcritto all' iſcritto alla ſteſſa sfera, come la sfera circoſcritta all' iſcritta allo ſteſſo Ottaedro; e ſon gli Ottaedri in ragion triplicata de' lati (§ 101) le sfere in ragion triplicata degli aſsi; dell'Ottaedro dunque circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa sfera ſono i quadrati de'lati, come 3 : 1. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE XI.

§. 115. *Dell' Ottaedro, e della Piramide circoſcrittibili alla ſteſſa sfera ſono i lati, e le ſolidità, come* 1 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

L' Ottaedro, che naſce nella Piramide delle Ottaedrali è circoſcrittibile alla ſteſſa sfera, che la Piramide ſteſſa (§ 79); ma queſto à il lato, ch' è la metà del lato della Piramide, ed è la ſua metà (§§ 56, 61); dunque è chiaro ciocchè D. D.

COROLLARIO.

§. 116. Ma ſon de' ſolidi terminati da piani circoſcrittibili alla ſteſſa sfera le ſuperficie, come le ſolidità; ſaran dunque dell' Ottaedro, e della Piramide circoſcrittibili alla ſteſſa Sfera i lati, le ſolidità, le ſuperficie, come 1 : 2.

PROPOSIZIONE XII.

§. 117. *Della Piramide, e dell' Ottaedro iſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come* 4 : 3.

DIMOSTRAZIONE.

Il quadrato del lato della Piramide è al quadrato del ſuo aſſe, come 3 : 2 (§ 51) = 6 : 4; ma eſſendo l'aſſe della Piramide all'aſſe della ſfera circoſcrittali, come 2 : 3 (§ 46), è quel quadrato a queſto, come 4 : 9; dunque il quadrato del lato della Piramide è a quello dell' aſſe della Sfera circoſcrittali, come 6 : 9 = 4 : 6; ma il quadrato dell'aſſe della Sfera è a quello del lato dell' Ottaedro iſcrittoli, come 2 : 1. = 6 : 3 (§ 94); dunque il quadrato del lato della Piramide è al quadrato del lato dell' Ottaedro iſcrittibile alla ſteſſa Sfera, come 4 : 3. C. D. D.

PROPOSIZIONE XIII.

§. 118. *L'Ottaedro circoſcritto ſta alla Piramide iſcritta alla ſteſſa Sfera, come* 27 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

L'Ottaedro ſta alla Piramide circoſcrittibile alla ſteſſa Sfera, come 1 : 2 = 27 : 54 (§ 115); ma la Piramide circoſcritta ſta all' iſcritt' alla ſteſſa sfera, come 27 : 1 = 54 : 2 (§ 47); dunque l'Ottaedro circoſcritto ſta alla Piramide iſcritt' alla ſteſſa sfera, come 27 : 2. C. D. D.

LEMMA I.

§. 119. *Nell' Ottaedro ogni corda è ad un ſuo aſſe parallella, ed è la terza ſua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

Di un qualunque Ottaedro ne ſiano eſibiti due trianguli aderenti ABC DBC così tra loro inclinati, che la retta EF, che ne uniſce i centri ci eſibiſca la cor- Fig. 81.

da dello ſteſſo Ottaedro. Si uniſchi AD, e dagli ſteſſi punti AD ſi calino ſu la comune baſe BC due perpendiculari, queſte dovranno convenir in M punto medio di quella, e paſſar per gli riſpettivi centri (§ 12).

I. Eſſendo i lati AC DC oppoſti agli anguli ABC DBC aderentemente convenuti nello ſteſſo angulo ſolido B dell'Ottaedro; dovran queſti eſibirci un angulo di un quadrato di tal Ottaedro all'angulo B ſottopoſto (§ 86); ſicchè la retta AD, perchè diagonale di un tal quadrato ſarà un aſſe dell' Ottaedro (§ 91); ma a queſto è parallella la corda EF, come quella che taglia proporzionatamente (§ 37) i lati AM DM del triangulo ADM; dunque nell' Ottaedro ogni corda è ad un ſuo aſſe parallella.

II. E perciò ſarà EF : AD : : ME: MA; ma ME : MA : : 1 : 3 (§ 38); dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 120. Le corde dell' Ottaedro ſon tutt' eguali, ſiccome eguali ſon gli aſſi (§ 91).

CO-

COROLLARIO II.

§. 121. Unendo nell'Ottaedro ogni asse quattro coppie di trianguli aderenti ; saranno in esso ad ogni asse quattro corde parallelle.

COROLLARIO III.

§. 122. Se si unischino perciò nell'Ottaedro i centri de'trianguli convenuti nello stesso suo angulo si avrà sotto quell' angulo un parallellogrammo equilatere ; essendo di sì fatte quattro corde le opposte parallelle allo stesso asse dell'Ottaedro.

COROLLARIO IV.

§. 123. Tirate dunque nell' Ottaedro tutte le corde si vedranno sotto i sei suoi anguli nati sei parallellogrammi assolutamente, e relativamente equilateri, così aderenti, che terminino un parallellepipedo, che à gli anguli ne' centri de' piani dell' Ottaedro.

COROLLARIO V.

§. 124. Il parallellepipedo, che naſce nell' Ottaedro dalle corde è equilatere.

LEMMA II.

§. 125. *Il parallellepipedo, che naſce nell' Ottaedro dalle corde è iſcrittibile alla Sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontra queſto co' ſuoi anguli i piani dell'Ottaedro tutti nel centro (§ 123); come fa la Sfera iſcritta nel medeſimo (§ 91); è dunque nella ſteſſa Sfera iſcrittibile; C. D. D.

LEMMA III.

§. 126. *Se un Solido equilatere ſia iſcrittibile alla Sfera, avrà regolari tutti i ſuoi piani.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I rettilinei terminanti un Solido ànno gli anguli negli anguli del Solido; quelli dunque, che terminano un Solido iſcrittibile alla sfera, iſcritto queſto nella sfera, l'avranno nella ſuperficie sferica; ma i punti della ſuperficie sferica appartenenti allo ſteſſo piano ſono nella periferia del cerchio, che quel piano imprime nella ſuperficie Sferica; i rettilinei dunque terminati un Solido iſcrittibile alla Sfera, ſono iſcrittibili al cerchio; ma i rettilinei del Solido equilatere ſono equilateri (§ 26.) gli equilateri iſcrittibili al cerchio ſon regolari (§ 85); ſe dunque un Solido equilatere ſia iſcrittibile alla Sfera, avrà regolari tutt'i ſuoi piani. C. D. D.

PROPOSIZIONE XIV.

§. 127. *Il Parallellepipedo, che naſce nell' Ottaedro dalle corde è un Cubo.*

DIMOSTRAZIONE.

E' queſto equilatere (§ 124), ed è iſcrittibile alla Sfera (§ 125); à perciò regolar' i ſuoi piani (§ pr); è dunque un Cubo. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 128. Il Cubo, che naſce nell' Ottaedro dalle corde meriterà dirs' iſcritto in eſſo, avendo i ſuoi angul' in tutt' i piani di quello.

COROLLARIO II.

§. 129. Il Cubo, che reſta iſcritto nell' Ottaedro dalle corde à il lato, ch' è la terza parte dell' aſſe dell' Ottaedro (§ 119).

COROLLARIO III.

§. 130. Incontrando la Sfera, che s' iſcrive nell' Ottaedro i ſuoi piani tutti nel centro (§ 77), come fa co' ſuoi anguli il Cubo iſcritto nello ſteſſo; ſarà l'Ot-

l'Ottaedro circoſcrittibile a quella Sfera, cui è iſcrittibile il Cubo, che naſce in eſſo dalle Corde.

COROLLARIO IV.

§. 131. E così ſarà l'aſſe dell'Ottaedro circoſcritto al lato del Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 3 : 1 (§ 119); onde ne ſaranno i quadrati come 9 : 1 = 18 : 2.

PROPOSIZIONE XV.

§. 132. *Dell'Ottaedro circoſcritto, e Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come 9 : 2.*

DIMOSTRAZIONE.

Nell'Ottaedro il quadrato del lato è al quadrato dell'aſſe, come 1:2 = 9:18 (§ 91); ma quello dell'aſſe dell'Ottaedro circoſcritto ſta a quello del lato del Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 18:2 (§ pr.); dunque &c. C. D. D.

CAPO IV.

Del Cubo.

§. 133. SIccome s'è veduto nato nell' Ottaedro il Cubo, così si vedrà nato nel Cubo l'Ottaedro; or l'esser ciascuno di questi Solidi padre, e figlio dell'altro, fa sì, che sian tra se ligati da tali, e tante relazioni, che sarebbe stato mal fatto il separarne i trattati.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 134. Il Cubo è quel Solido Regolare terminato da sei eguali quadrati, così combinati, che da tre anguli di questi sia compres' ogni solido suo angulo.

COROLLARIO.

§. 135. Gli anguli ſolidi del Cubo ſon otto, eſſendone ventiquattro i ſuoi anguli piani.

DEFINIZIONE II.

§. 136. Si diranno nel Cubo lati oppoſti quelli, che inſiſtono ad anguli oppoſti dello ſteſſo quadrato.

AVVERTIMENTO.

§. 137. Si dimoſtreranno nel Cubo i lati oppoſti parallelli, e perciò ſi diſtingueranno di eſſi gli eſtremi corriſpondenti, e gli alterni (§ 42).

COROLLARIO.

§. 138. La retta, che unisce nel Cubo gli eſtremi corriſpondenti di due ſuoi lati oppoſti è la diagonale d'un ſuo quadrato.

DEFINIZIONE III.

§. 139. Anguli oppoſti ſon quelli, ne' quali ſon gli eſtremi alterni de' lati Oppoſti.

DEFINIZIONE IV.

§. 140. Aſſi le rette, che uniſcono due ſuoi anguli oppoſti.

COROLLARIO.

§. 141. Gli aſſi uniſcono gli eſtremi alterni de' lati oppoſti (§ 139) e non ſono, che quattro (§ 135).

LEMMA.

§. 142. *Nel Cubo ogni lato è normale ai quadrati, ne' quali inſiſte.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè così incontra con ogni eſtremo il vertice di un angulo di uno di eſſi, che fa con i prodotti lati di quell' an-

angulo quattro anguli retti. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 143. Ad ogni quadrato del Cubo ſon normali gli altri quattro, che gli ſono aderenti.

COROLLARIO II.

§. 144. Nel cubo i lati oppoſti ſon parallelli, ed unendone gli eſtremi corriſpondenti ſi avrà un parallellogrammo rettangulo.

COROLLARIO III.

§. 145. Le diagonali d'ogni sì fatto rettangulo ſon aſſi del Cubo (§ 141); e perciò quegli aſſi, che calanſi da due anguli contigui del Cubo come diagonali di un medeſimo sì fatto rettangulo ſono eguali, e s' interſegan *bifariam*.

PROPOSIZIONE I.

§. 146. *Nel Cubo gli aſſi ſono eguali, tutti s' interſegan nel medeſimo punto bi-*

fa-

fariam, ed è queſto il ſuo centro.

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. Nel Cubo ogni angulo ne à altri tre contigui (§ 8); ſicchè ogni aſſe dev' eguagliarſi, e dividerſi *bifariam* con altri tre (§ pr), e perciò nel medeſimo punto; ma quattro ſon gli aſſi del Cubo (§ 141); nel Cubo dunque tutti gli aſſi ſono eguali, e s' interſegan nel medeſimo punto *bifariam*.

III. Se ſon tutti eguali gli aſſi del Cubo, e tutti nello ſteſſo punto s'interſegan *bifariam*; ſarà quel punto equidiſtante da tutt'i ſuoi anguli; ma ſe queſto ſi uniſca co' centri de' piani, ſi vedran queſte rette a quelli normali, ed eguali; ſe ſi uniſca co' punti medii de' lati ſi vedrà lo ſteſſo, come nel (§ 74); è queſto dunque il ſuo centro, come D. D.

COROLLARIO I.

§. 147. Al Cubo dunque è circoſcrittibile, ed iſcrittibile la Sfera.

co-

COROLLARIO II.

§. 148. L'asse dunque del Cubo è lo stesso, che l'asse della Sfera circoscrittibile ad esso, e quello della Sfera è lo stesso, che quello del Cubo iscrittibile in essa.

COROLLARIO III.

§. 149. Essendo nel Cubo la retta, che unisce gli estremi corrispondenti de' suoi lati opposti diagonale di un suo quadrato (§ 138), ed essendo perciò il quadrato dell'asse triplo del quadrato del lato; ed essendo così ne' Cubi gli assi, come i lati; saranno i Cubi, come le Sfere circoscritte.

COROLLARIO IV.

§. 150. Ma son ne' Cubi, come i lati anche le diagonali de' rispettivi quadrati; simili saran dunque in essi assolutamente, e relativamente i trianguli, che nascono in essi tra un asse, un lato, ed una diagonale de' rispettivi quadrati; e perciò

sa-

ſaranno ne' Cubi aſſolutamente, e relativamente eguali gli anguli, che fanno gli aſſi ne' riſpettivi lati.

COROLLARIO V.

§. 151. La Sfera, che s' iſcrive nel Cubo incontra i ſuoi piani tutti nel centro; dal che, eſſendo normali ai piani del Cubo le rette, che uniſcono il ſuo centro co'centri de' piani; ed eſſendo nel Cubo parallell' i piani oppoſti; la retta, che uniſce nel Cubo i centri di due ſuoi piani oppoſti è ad eſſi normale, e paſſa pel centro; e così ſiccom'è diametro della Sfera iſcrittibile al Cubo, così diraſsi diametro del Cubo. Il diametro dunque del Cubo è lo ſteſſo, che il diametro della Sfera iſcrittibile in eſſo, ed *inverſa*.

COROLLARIO VI.

§. 152. Il diametro del Cubo eguaglia il ſuo lato; miſurando l' uno, e l' altro la diſtanza di due piani parallelli (§ 142); dal che 1.° ſaranno i Cubi, come le Sfere iſcritte in eſsi. 2.° Sarà nel Cubo il qua-

quadrato dell' asse a quello del diametro, come 3 : 1 (§ 149), cioè, come sta nell' Ottaedro l' asse al diametro.

LEMMA I.

§. 153. *Nel Cubo ogni corda eguaglia la metà della diagonale di un suo quadrato.*

DIMOSTRAZIONE.

Rappresentino A e B due quadrati d' un Cubo aderenti colla stessa inclinazione, che ànno nel Cubo, cosicchè la retta A B, che ne unisce i centri esibisca la corda dello stesso Cubo. Si tiri la diagonale G H; questa dovrà passare pel centro A, e restar in esso divisa *bifariam*; dai punti in fine AB si calino su la comune base IH due perpendiculari, queste, dovendo entrambe dividere *bifariam* IH, converranno nel suo punto medio E. Fig. 9.

Essendo, per costruzione, nel triangulo AEH retto l' angulo in E, e semiretto quello in H; sarà parimente semiretto l'altro in A; sicchè sarà AE=EH;

e per-

e perciò AHq. doppio di AEq.; ma essendo nel triangulo AEB retto l' angulo in E perchè misura dell' inclinazione de' quadrati A B, ed egual' i lati AE BE (§ 12); sarà parimente ABq. doppio dello stesso AEq.; dunque la corda AB eguaglia la semidiagonale AH; C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 154. Nel Cubo le corde son tutt' eguali; e sono ne' Cubi le corde, come le diagonali, e perciò come i lati.

COROLLARIO II.

§. 155. Se il quadrato della diagonale di un quadrato è il doppio del quadrato stesso; sarà quello della semidiagonale, cioè quello della corda del Cubo la metà del quadrato del Cubo.

LEMMA II.

Fig. 10. §. 156. *Le rette, che uniscono i tre punti A B C, de' quali ognuno equidista dagli altri due non sono in diretto, ma com-*

comprendono un triangulo equilatere.

DIMOSTRAZIONE.

Se fuſser in diretto, ſarebbe per l'ipoteſi la parte AB eguale al tutto AC; non ſon dunque in diretto, e perciò comprendono un triangulo, per l'ipoteſi ſteſsa equilatere. C. D. D.

PROPOSIZIONE II.

§. 157. *Tirate nel Cubo tutte le corde, reſta in eſſo iſcritto un Ottaedro, ed è queſto la ſeſta ſua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Eſſendo nel Cubo tutt'eguali le corde (§ 154) de' tre centri de'quadrati convenuti nello ſteſſo ſuo angulo ognuno equidiſtarà dagli altri due; e perciò, tirate nel Cubo queſte tre corde, ſi avrà ſotto quell'angulo un triangulo equilatere (§ pr), e tiratele tutte ſi avranno otto eguali trianguli equilateri ſotto gli otto anguli del Cubo, così aderentemente Figura ſolida.

contigui, che terminino un ſolido; ma ſono in queſto ſei gli anguli, giacchè ſei ſono i piani del Cubo; ed in ogni angulo di queſti convengono quattro anguli di quei trianguli; giacchè, eſſendo nel Cubo ogni piano ad altri quattro contigui, in ogni centro d'ogni piano di eſſo convengono quattro corde (§ 14), e perciò quattro di quegli anguli (§ pr.); tirate dunque nel Cubo tutte le Corde naſce in eſſo un Ottaedro, che avendo gli anguli in tutt'i piani del Cubo, meriterà dirs' iſcritto in eſſo (§ 16).

II. Queſto, avendo gli anguli ne'centri de'quadrati del Cubo, avrà per aſſe il diametro del medeſimo (§ 151), ed avrà perciò per altezza d'ogni ſua piramide quadrata un ſemidiametro dello ſteſſo (§ 95) dividendoſi dunque l'Ottaedro in due eguali sì fatte piramidi quadrate (§ 88); ſi avrà la ſolidità dell'Ottaedro, nato così nel Cubo dal fatto del doppio di un quadrato della corda, e perciò di un quadrato del Cubo (§ 155), e della terza parte del ſemiaſſe dell'Ottaedro, cioè la ſeſta parte del diametro, o ſia lato del Cubo (§ 152); ma s'à la Soli-

lidità del Cubo dal fatto d'un ſuo quadrato per l'intero ſuo lato; l'Ottaedro dunque nel Cubo iſcritto dalle corde è la ſeſta ſua parte; ed è perciò vero ciocchè D. D.

COROLLARIO I.

§. 158. Son, come i Cubi gli Ottaedri iſcritti in eſſi.

COROLLARIO II.

§. 159. Eſſendo l'aſſe dell'Ottaedro iſcritto nel Cubo diametro del Cubo, e perciò ſuo lato (§ 152); ſarà l'Ottaedro la ſeſta parte del Cubo del ſuo aſſe, ed iſcrittibile in eſſo.

COROLLARIO III.

§. 160. Se il Cubo è all'Ottaedro della ſua corda, come 6 : 1; ſarà a quello della diagonale di un ſuo quadrato, come 6 : 8 = 3 : 4 (§ 153).

COROLLARIO IV.

§. 161. Dal che ſarà il Cubo alla piramide fatta ſu la ſteſſa diagonale, come 3 : 1 (§ 61).

COROLLARIO V.

§. 162. Se ſta il Cubo alla Piramide fatta ſu la diagonale di un ſuo quadrato, come 3 : 1 (§ pr), il Cubo, e la piramide diſegnata avranno in ragion reciproca le baſi, e le altezze.

PROPOSIZIONE III.

§. 163. *Il Cubo ſta all' Ottaedro in ragion compoſta dalla triplicata di quella, che è la diagonale di un ſuo quadrato al lato dell' Ottaedro, e da quella di 3:4.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo è all'Ottaedro della diagonale di un ſuo quadrato, come 3 : 4 (§ 160), queſto è ad ogni altro Ottaedro in ragion tri-

triplicata de' lati (§ 101); Dunque il Cubo è all' Ottaedro come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE IV.

§. 164. *Il Cubo è alla Piramide in ragion composta dalla triplicata di quella, che è la diagonale di un suo quadrato al lato della Piramide, e da quella di 3:1.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo è alla Piramide fatta su la diagonale di un suo quadrato, come 3:1 (§ 161); questa è ad ogni altra piramide in ragion triplicata de' lati; il Cubo dunque è alla Piramide come s'è detto, e D. D.

PROPOSIZIONE V.

§. 165. *Il Cubo circoscritto sta all' Ottaedro iscritto alla stessa sfera, come 6:1.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontrando la Sfera, che s'iscrive nel Cubo i suoi piani tutti nel centro (§ 151),

come fa co' ſuoi anguli l'Ottaedro iſcritto nel medeſimo (§ 157); ſarà l'Ottaedro, che s'iſcrive nel Cubo quello ſteſſo, che può iſcriverſi nella Sfera iſcritta nel Cubo, e perciò ſarà il Cubo circoſcritto all'Ottaedro iſcritto alla ſteſſa Sfera come 6 : 1 (§ 157) C. D. D.

PROPOSIZIONE VI.

§. 166. *Il Cubo nato nell' Ottaedro dalle corde ſta all' Ottaedro, come* 2 : 9.

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo, che così naſce nell'Ottaedro è fatto ſu la terza parte dell'aſſe ſuo (§ 119); ſtarà dunque al Cubo di tal aſſe, come 1 : 27 = 2 : 54; ma il Cubo fatto ſu l'aſſe dell'Ottaedro ſta all' Ottaedro, come 6 : 1 (§ 159) = 54 : 9; il Cubo dunque nato nell'Ottaedro dalle Corde ſta all'Ottaedro, come 2 : 9. C. D. D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 167. *L'Ottaedro circoſcritto è al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 9:2.*

DIMOSTRAZIONE.

Incontrando la Sfera, che s'iſcrive nell'Ottaedro i ſuoi piani tutti nel centro, come fa co' ſuoi angul'il Cubo iſcritto nel medeſimo (§ 130) ſarà il Cubo, che naſce nell'Ottaedro dalle corde quello ſteſſo, che può iſcriverſi nella Sfera iſcritta nel medeſim'Ottaedro, e perciò ſarà l'Ottaedro circoſcritto al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 9:2 (§ pr) C. D. D.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 168. *La Piramide circoſcritta è al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 9:1.*

DIMOSTRAZIONE.

La Piramide è all' Ottaedro circoſcrittibile alla ſteſſa sfera, come 2 : 1 = 18:9 (§ 115); ma l' Ottaedro circoſcritto ſta al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 9 : 2 (§. pr); dunque la Piramide circoſcritta ſta al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come 18 : 2 = 9 : 1. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 169. *Il Cubo e la Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera, ſono come* 3 : 1.

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo iſcritto è alla Piramide circoſcritta alla ſteſſa Sfera, come 1 : 9 = 3 : 27 (§ pr.); ma la Piramide circoſcritta, è all' iſcritta alla ſteſſa Sfera, come 27 : 1 (§ 47); dunque il Cubo e la Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera, ſono come 3 : 1. C. D. D.

PROPOSIZIONE X.

§. 170. *Il Cubo circoſcritto ſta al Cubo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, e l' Ottaedro circoſcritto all'Ottaedro iſcritto allo ſteſſo Cubo, come* 27 : 1.

DIMOSTRAZIONE.

I. Il Cubo ſta all' iſcrittoli Ottaedro, come 6 : 1 = 54 : 9 (§ 157) queſto ſta al Cubo iſcrittoli, come 9 : 2 (§ 166); dunque il Cubo circoſcritto ſta al Cubo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, come 54 : 2 = 27 : 1.

II. Similmente l'Ottaedro ſta al Cubo iſcrittoli, come 9 : 2 = 27 : 6, queſto ſta all'Ottaedro iſcrittoli, come 6 : 1; dunque l'Ottaedro circoſcritto ſta all'iſcritto allo ſteſſo Cubo, come 27 : 1. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 171. Il Cubo circoſcritto allo iſcritto allo ſteſs' Ottaedro, l' Ottaedro circoſcritto all' iſcritto allo ſteſſo Cubo, e la

Pi-

Piramide circoſcritta all'iſcritta alla ſteſſa Sfera ſono nella ſteſſa ragione (§ 47).

COROLLARIO II.

§. 172. Di queſti Solidi i lati de' circoſcritti ſono ai lati de' relativ' iſcritti, come 3 : 1.

PROPOSIZIONE XI.

§. 173. *Del Cubo, e della Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come* 1 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

Il Cubo, e la Piramide iſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſon come 3 : 1 (§ 169); ma il Cubo è alla Piramide fatta ſu la diagonale di un ſuo quadrato, come 3 : 1 (§ 161); dunque la Piramide fatta ſu la diagonale del quadrato del Cubo ſi è quella, ch'è iſcrittibile nella ſteſſa Sfera, che il Cubo; e perciò del Cubo, e della Piramide iſcrittibili nella ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come 1 : 2. C.D.D.

AVVERTIMENTO.

§. 174. Se si tir' in ogni quadrato del Cubo una diagonale, in modo da terminarsi da esse una piramide (ciocchè facilmente si ottiene) quest' avendo gli anguli in tanti anguli del Cubo mostrerà bene d'esser iscrittibile nella stessa Sfera, che il Cubo.

COROLLARIO.

§. 175. E poichè, per ottenersi tal interna Piramide nel Cubo, restan da esso dalle stesse diagonali tagliate quattro piramidi simili, ed eguali; sarà perciò il Cubo ad ogni piramide, che da esso tagliano le sue diagonali, cioè ad ogni sua piramide angulare (§ 24) come 6:1.

PROPOSIZIONE XII.

§. 176. *Della Piramide, e del Cubo circoscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 6 : 1.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Il quadrato del lato della Piramide è a quello del ſuo aſſe, come 3 : 2 = 6 : 4 (§ 51), ma il quadrato dell'aſſe della Piramide è a quello dell'aſſe della Sfera iſcrittibile ad eſſa, come 4:1(§ 46), l'aſſe della Sfera è lo ſteſſo, che il diametro, o ſia lato del Cubo alla ſteſſa Sfera circoſcrittibile (§ 151); dunque il quadrato del lato della Piramide è a quello del lato del Cubo alla ſteſſa Sfera circoſcrittibile, come 6 : 1. C. D. D.

PROPOSIZIONE XIII.

§. 177. *Dell' Ottaedro, e del Cubo circoſcrittibili alla ſteſſa Sfera ſono i quadrati de' lati, come* 3 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

Il Diametro dell' Ottaedro è lo ſteſſo, che l' aſſe della Sfera iſcrittali (§ 97) queſto è lo ſteſſo, che il diametro, o ſia lato del Cubo circoſcrittibile ad eſſa (§ 151);

(§ 151); sarà dunque il lato dell' Ottaedro a quello del Cubo circoscrittibile alla stessa Sfera, come sta al suo diametro, e perciò ne saranno i quadrati, come 3 : 2 (§ 111). C. D. D.

PROPOSIZIONE XIV.

§. 178. *Dell' Ottaedro, e del Cubo iscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come* 3 : 2.

DIMOSTRAZIONE.

L'asse della Sfera è asse dell'Ottaedro, e del Cubo iscritt'in essa (§§ 94, e 148); ma nell' Ottaedro il quadrato del lato è a quello dell'asse, come 1 : 2 = 3 : 6 (§ 94); nel Cubo quello dell' asse è a quello del lato, come 6 : 2 (§ 149); dunque dell'Ottaedro, e del Cubo iscrittibili alla stessa Sfera sono i quadrati de' lati, come 3 : 2. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 179. Dell' Ottaedro, e del Cubo circoſcritti alla ſteſſa Sfera ſono i lati, come quelli dell' Ottaedro, e del Cubo alla ſteſſa Sfera iſcritti (§ pr).

COROLLARIO II.

§. 180. E perciò ſaran permutando del Cubo circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa Sfera i lati, come quelli dell' Ottaedro circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa Sfera; onde ſarà il Cubo circoſcritto al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come l' Ottaedro circoſcritto all' iſcritto alla ſteſſa Sfera.

COROLLARIO III.

§. 181. E così nuovamente permutando, ſarà il Cubo all' Ottaedro alla ſteſſa sfera circoſcrittibili, come il Cubo all' Ottaedro alla ſteſſa sfera iſcrittibili.

COROLLARIO IV.

§. 182. Eſſendo nel Cubo il quadrato dell'aſſe a quello del lato, come 3 : 1 (§ 149); ed eſſendo il lato lo ſteſſo, che il diametro (§ 152), queſto lo ſteſſo, che l'aſſe della ſfera iſcritta in eſſo, queſto lo ſteſſo, che l'aſſe del Cubo in eſſa iſcritto; ſarà il quadrato dell'aſſe del Cubo circoſcritto a quello dell'aſſe del Cubo iſcritto alla ſteſſa ſfera, come 3 : 1; ma ſon ne' Cubi gli aſſi, come i lati (§ 149); ſaran dunque tanto de' Cubi circoſcritto, ed iſcritto alla ſteſſa ſfera, quanto degli Ottaedri alla ſteſſa ſfera circoſcritto, ed iſcritto i quadrati de' lati, come 3 : 1.

PROPOSIZIONE XV.

§. 183. *Il Cubo circoſcritto è al Cubo iſcritto alla ſteſſa Sfera, come la Sfera circoſcritta all' iſcritta allo ſteſſo Cubo.*

DIMOSTRAZIONE.

A B C D

Sia A un Cubo B la Sfera iſcritta in A, C il Cubo iſcritto in B, e D la Sfera iſcritta in C.

Sono i Cubi, come le Sfere ad eſs' iſcritte (§ 152); dunque A : C : : B : D. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 184. Sarà la Sfera circoſcritta all'iſcritta allo ſteſſo Cubo, come la Sfera circoſcritta all' iſcritta allo ſteſs' Ottaedro (§ 180, e 110).

CAPO

CAPO V.

Del Dodecaedro.

IL trattato dell' Icosaedro si farà seguir questo del Dodecaedro, perchè dipendente da esso.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 185. Dodecaedro si appella quel Solido Regolare terminato da dodici pentagoni, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che in ogni angulo solido del Dodecaedro convengano tre de'di loro anguli piani.

COROLLARIO.

§. 186. Gli anguli Solidi del Dodecaedro son venti, essendo sessanta i suoi anguli piani.

DEFINIZIONE II.

§. 187. Si diranno lati opposti nel Dodecaedro quelli, che insistono a quegli anguli di due suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base.

AVVERTIMENTO.

§. 188. Si noti tale esser la natura del Dodecaedro in seguito dell'uniformità norma della Regolarità, che i suoi lati opposti non da una sola banda, e così con due soli estrem' insistano a quegli anguli di due suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base, ma anche dall' altra banda cogli altri estremi faccian lo stesso in altri due simili pentagoni.

COROLLARIO.

§. 189. Nel Dodecaedro dunque ad ogni lato un altro solo n' è opposto.

DEFINIZIONE III.

§. 190. Poichè nel Dodecaedro si mostreran parallell' i lati opposti ; potremo perciò notare in essi gli estremi corrispondenti , e gli alterni (§ 42); e sono i primi quelli , che insistono ad anguli opposti alla stessa comune base ; i secondi quelli , che insistono ad anguli opposti a diversa comune base ,

DEFINIZIONE IV.

§. 191. Anguli opposti son quelli , ne' quali sono gli estremi alterni de'lati opposti .

AVVERTIMENTO .

§. 192. Si noti , che in seguito della stessa Uniformità norma della Regolarità , degli estremi de'lati convenut' in due anguli opposti del Dodecaedro non solo due , ma tutti siano alterni di lati opposti ,

COROLLARIO.

§. 193. Gli anguli dunque opposti a due anguli contigui son anche contigui, e perciò i lati, che l'una, e l'altra coppia tramezzano son opposti; sicchè a cinque anguli annularmente contigui, come son quelli, ne' quali son gli anguli dello stesso pentagono, ne son opposti altri cinque, anche annularmente contigui, cioè, ne' quali anche son gli anguli dello stesso pentagono, e perciò tutt' i lati del primo pentagono saran relativamente opposti ai lati del secondo; sicchè potran dirsi

DEFINIZIONE V.

§. 194. Pentagoni opposti quelli, che son terminati da lati relativamente opposti.

DEFINIZIONE VI.

§. 195. Assi nel Dodecaedro son le rette, che uniscono due suoi anguli opposti.

CO-

COROLLARIO I.

§. 196. Gli affi nel Dodecaedro unifcono gli eſtremi alterni de' lati oppoſti (§ 191).

COROLLARIO II.

§. 197. Nel Dodecaedro gli affi ſon dieci(§ 186).

DEFINIZIONE VII.

§. 198. Siccome ſarà detta corda di un pentagono regolare la ſotteſa ad uno de' ſuoi anguli, e nel Dodecaedro, oltre gli eſterni pentagoni, ſe ne moſtreranno altri interni parimente regolari; così nel Dodecaedro, (per non confonder queſte colle altre ſiſe corde (§ 14)), ſaran dette corde pentagonali prime, o ſemplicemente pentagonali prime, le corde degli eſterni ſuoi pentagoni; e pentagonali ſeconde le corde degl' interni; ed ogni corda sì fatta ſarà detta oppoſta a quel lato del pentagono, che ſi oppone a quello ſteſſo angulo del medeſimo, cui è la corda ſottomeſſa.

LEMMA I.

§. 199. *Ne' pentagoni regolari le corde ſono ai lati proporzionali, e parallelle ai lati oppoſti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 11. Ne' regolari pentagoni BCDEF GHIKL ſiano tirate le corde FC FD LI.

I. Avendo i trianguli DEF IKL per l'ipoteſi eguali gli angul in E K, ed i lati, che li comprendono proporzionali, perchè eguali, ſaran ſimili, e perciò ſaran le corde ai lati proporzionali.

II. Gli anguli DFC, FCB, come inſiſtenti ad eguali archi, circoſcrittoſi al pentagono il cerchio, ſono eguali; e perciò la corda DF è parallella all' oppoſto lato BC; locchè avendo ſempre luogo, ſarà vero, ciocchè D. D.

COROLLARIO I.

§. 200. Le corde dello ſteſſo pentagono, o di pentagoni regolari d'eguali lati ſono eguali, e perciò eguali ſon tutte le pen-

pentagonali prime del Dodecaedro.

COROLLARIO II.

§. 201. Ad ogni pentagonale prima è parallello quel lato, che l'è opposto.

LEMMA II.

§. 202. *Gli anguli, che forma ogni lato del Dodecaedro nelle corde del pentagono, cui insiste sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

BCFA esprima un angolo solido del Dodecaedro di cui sia compito, per comodo della dimostrazione, il solo pentagono BCDEF; ed in questo sian tirate le corde BD BE. Dal punto A sul piano del pentagono si cali la normale AG, ed unito GB, si uniscano i punti A e G con i punti CDEF. Fig. 12.

Per costruzione ACq = AGq + GCq; ed AFq = AGq + GFq; ma ACq = AEq. perchè pentagonali prime (*fig. solida*) dello stesso Dodecaedro (§ 200);

dunque AGq + GCq = AGq + GFq; e perciò GC = GF; queſto fa conoſcere, che ne' trianguli GBC GBF ſiano eguali gli anguli in B; ai quali uniti gli altri eguali anguli DBC EBF ſi conoſceranno egurali gli anguli GBD GBE; da queſto appariſce l' eguaglianza de'lati GD GE; da queſto l' eguaglianza degli altri lati AD AE; e da queſto finalmente l' eguaglianza degli anguli ABD ABE, cioè quelli, che fa il lato AB del Dodecaedro nelle corde del pentagono, cui inſiſte, locchè avendo ſempre luogo, ſaranno &c. C.D.D.

LEMMA III.

§. 203. *Gli anguli, che fanno i lati del Dodecaedro nelle corde de' pentagoni, ne' qual' inſiſtono ſon eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 12. Gli anguli Solidi BCFA, IKNH ſi credano appartenere allo ſteſſo Dodecaedro, di cui ſian compit'i ſoli pentagoni BCDEF IKLMN, e ſian in queſti tirate le corde BD BE IL IM.

Queſti

Queſti anguli perchè fatti da ſoli tre anguli piani relativamente eguali ſono eguali, e perciò ſoprappoſti dovran combacciare ; Se credaſi dunque ſoprappoſto l'angulo B all'angulo I in modo , che vada l'angulo CBF ſu l'angulo KIN, ſi vedrà il lato AB cader ſul lato IH , e l'intero pentagono BCDEF ſul pentagono IKLMN, eſſendo ſimili, ed eguali (§ 1); ſe dunque da punto a punto non può tirarſi, che una retta, caderanno anche le corde BD BE ſu le corde IL IM ; dal che combacciando gli eguali anguli (§ pr) ABD ABE cogli anguli HIL HIM , e dovendo queſto aver ſempre luogo, ſarà ſempre vero ciocchè D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 204. Si vedranno nel Capo VIII. degli anguli ſolidi eguali, che non poſſono combacciare ; ma ivi ſi vedrà di vantaggio , che non poſs'aver luogo sì fatta incombacciabilità ove ſiano gli eguali anguli compreſi da anguli piani non ſolo relativamente, ma anche aſſolutament'eguali ; ecco perchè degli eguali anguli

così

così fatti se ne sia afferita, e se ne asserirà la combacciabilità.

PROPOSIZIONE I.

Fig. 13. §. 205. *Nel Dodecaedro le pentagonali prime AB BC CD DA, che uniscono estremi di lati insistenti nello stesso EF altro lato del medesimo sono in un piano, e chiudono un quadrato.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Le corde AB CD, perchè parallelle alla stessa FE base comune degli aderenti pentagoni M N (§ 201) son parallelle tra loro, e perciò nello stesso piano; ma in questo pogian gli estremi AD BC son tutte dunque nello stesso piano.

II. Essendo AB CD non solo parallelle, ma eguali (§ 200) sarà ABCD parallellogrammo; si tirino in questo le diagonali AC BD, e ne' pentagoni M N le corde AE DE; si avranno ne' trianguli AEC DEB i lati AE DE eguali, perchè pentagonali prime (§ 200), i lati EB EC eguali perchè lati del Dodecaedro,

dro, e gli anguli che questi fanno in quelle eguali (§ pr); eguali nè son dunque le basi AC BD; e perciò ABCD è rettangulo, ma à anche i lati eguali, perchè tutti pentagonali prime (§ 200) sarà dunque quadrato. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 206. E poichè in ogni lato del Dodecaedro ne insistono altri quattro (§8); potrà sott' ogni lato del Dodecaedro aver luogo un sì fatto quadrato.

PROPOSIZIONE II.

§. 207. *I quadrati, che dalle pentagonali prime nascon nel Dodecaedro sotto i suoi lati opposti son parallelli tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè insistendo nel Dodecaedro i suoi lati opposti dall' una, e dall' altra banda a quei vertici de' suoi pentagoni aderenti, che si oppongono alla comune lor base (§ 188); saranno gl' in- Figura solida.

fe-

feriori, e ſuperiori lati de' quadrati così nati ſotto i lati oppoſti parallelli tra loro, perchè parallella ogni coppia di eſſi alla riſpettiva di quelle comuni baſi, e ne ſaran parallell' i laterali, perchè uniti da lati, per la ſteſſa ragion parallelli; ſon dunque i quadrati &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 208. Se i quadrati così nati ſotto i lati oppoſti ſon terminati da lati relativamente parallelli; parallelli ſaran nel Dodecaedro i lati oppoſti, perchè parallelli a pentagonali parallelle.

COROLLARIO II.

§. 209. Dal che parallelli anche ſaran nel Dodecaedro i pentagoni oppoſti (§194).

COROLLARIO III.

§. 210. Le rette, che uniſcono gli anguli corriſpondenti di sì nati quadrati aggiungeranno ad eſſi altri quattro laterali parallellogrammi; e così chiuderanno con

eſſi

essi un parallellepipedo, ma i laterali parallellogrammi, che così nascono, sono altri quattro quadrati nati similmente da altre simili pentagonali; con tale operazione dunque nasce nel Dodecaedro un Cubo, il quale avendo tutt' i suoi angoli in tanti altri angoli del Dodecaedro, sarà iscrittibile nella stessa Sfera, che quello, (qualora si trovi, che lo sia il Dodecaedro alla sfera iscrittibile, come si vedrà).

PROPOSIZIONE III.

§. 211. *Nel Dodecaedro le pentagonali prime, che uniscono gli estremi de' lat' insistenti nello stesso pentagono del medesimo, sono in un piano, e comprendono un pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo ciascuna di queste parallella al rispettivo lato del sottoposto pentagono (§ 201), se non fussero nello stesso piano, sarebbero i varj piani nell' ipotesi passanti per i varj anguli di esse, parallelli tra loro, perchè parallelli allo stesso sot- Figura solida.

ſottopoſto pentagono, e ſi ſarebbero incontrati; ſon dunque nello ſteſſo piano.

II. Ma ſono eguali (§ 200), e comprendono anguli a quelli del ſottopoſto pentagono eguali; eſſendo parallelle ai lati di quello; comprendono dunque un pentagono regolare; C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 212. Ogni sì fatto pentagono è parallello al pentagono eſteriore ſottopoſto, e perciò parallello parimente all' altro a quell' oppoſto.

COROLLARIO II.

§. 213. Tutti sì fatti pentagoni ſono eguali (§ 200), e perciò eguali ſon anche tutte le corde di eſsi, cioè le già dette pentagonali ſeconde.

COROLLARIO III.

§. 214. Poichè ne' pentagoni regolari ſono i lati alle corde proporzionali (§ 199); ſarà per ciò nel Dodecaedro ogni pen-

pentagonale prima media proporzionale tra il lato, e la pentagonale ſeconda del medeſimo.

LEMMA.

§. 215. *Le rette, che uniſcono nel Dodecaedro di due ſuoi pentagoni aderenti i vertici oppoſti alla comune lor baſe, ſon le ſue pentagonali ſeconde.*

DIMOSTRAZIONE.

I tre pentagoni regolari, ed eguali A B D uniti nell'angulo ſolido D eſprimano quella parte di un Dodecaedro, che ne dimoſtrano tre ſuoi pentagoni unit'in un angulo dello ſteſſo; di queſti, che tutti aderiſcono, ſe ne uniſcano due anguli A B oppoſti alla comune baſe C D, e ſi tirino negli ſteſſi due pentagoni A B le pentagonali prime CA CB oppoſte a quei lati, ne'quali queſti due pentagoni toccano il terzo. Fig. 14.

Eſſendo le corde AC CB oppoſte, per coſtruzione, ai lati dello ſteſſo pentagono D, uniranno queſte tre eſtremi di lati AM CD BN inſiſtenti allo ſteſſo penta-

gono

gono MDN, e perciò comprendono un angulo di quei pentagoni regolari(§ 211), le corde de' quali ſon dette pentagonali ſeconde (§ 213); dunque AB, ch' è ſottes' a quell' angulo è pentagonale ſeconda di quel Dodecaedro, di cui per comodo della figura ſe ne vede ſola una parte; ma queſta per coſtruzione uniſce gli anguli A B di due pentagoni aderenti oppoſti alla comune lor baſe CD, la retta dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 216. Dunque le pentagonali ſeconde uniſcono nel Dodecaedro gli eſtremi corriſpondenti de' lati oppoſti (§ 190).

COROLLARIO II.

§. 217. Ma convenendo negli anguli oppoſti del Dodecaedro eſtremi alterni de' ſuoi lati oppoſti (§ 191), le rette, che ſi tirano in eſſo da un ſuo angulo agli eſtremi de' lati convenuti nell' angul' oppoſto uniſcono eſtremi corriſpondenti de' lati oppoſti (§ 192); queſte dunque ſon pentagonali ſeconde e perciò eguali(§ 213).

LEM-

LEMMA II.

§. 218. *Gli anguli, che forma ogni asse del Dodecaedro ne' lati di esso son eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè unit' ogni estremo dell' asse; o sia ognuno degli anguli, ne' quali termina l'asse (§ 195) cogli estremi de' lati convenuti nell' angul' opposto, si ànno sei trianguli relativament' equilateri, come fatti da sei pentagonali seconde (§ pr), sei lati del Dodecaedro, e l'asse comune; eguali son dunque gli anguli, che in questi forma l' asse ne' lati del Dodecaedro, perchè opposti all' eguali pentagonali seconde. C. D. D.

LEMMA III.

§. 219. *Nel Dodecaedro ogni asse è normale alla base triangule degli anguli, che unisce.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 15. Diſegni ABCD quella piramide triangulare, che taglia da un Dodecaedro la baſe triangula BCD del ſuo angulo A (§ 24), e diſegni AE quella parte dell' aſſe, che vien tagliata dalla ſteſſa baſe BCD; ſi uniſca in fine il punto E, in cui l'aſſe incontra il triangulo co' punti BCD.

Si dimoſtrano dal §. pr. eguali gli anguli in E, e perciò &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 220. Dalla total' eguaglianza de' trianguli ABE ACE ADE appariſce di vantaggio, che gli aſſi nel Dodecaedro incontrino le baſi triangule de' di loro anguli giuſto nel centro.

COROLLARIO II.

§. 221. E poichè eguali ſon le altezze delle piramidi eguali ſimili, e ſimilmente poſte; ſaranno perciò nel Dode-

decaedro le parti, che dagli assi tagliano le basi de' rispettivi anguli tutt'eguali.

PROPOSIZIONE IV.

§. 222. *Gli anguli, che ne' Dodecaedri fanno gli assi ne' rispettivi lati son tutti assolutamente, e relativamente eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. ABCD FGHI rappresentino due piramidi angulari, che dallo stesso Dodecaedro àn tagliate due sue basi triangule BCD GHI, ed AE FL disegnino le parti, che queste àn tagliate dai rispettivi assi. Fig. 15.

Essendo sì fatte piramidi in tutto simili, ed eguali (§ 30) soprapposte combacceranno; sicchè negandos' in tal caso anche la congruenza dell' asse AE coll' asse FL, e così l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati, verrebbe a dirsi essersi dallo stesso comun vertice calate su lo stesso comun piano due normali (§ 219); locchè ripugnando, converrà confessare la congruenza

degli assi, AE FL, e così l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati.

Fig. 16. ABCD aFGH siano due piramidi angulari di diversi Dodecaedri, ed AE aI rappresentino le parti de' rispettivi assi. Si suppongano soprapposti, e combacciati gli eguali di loro anguli verticali A a (§ 3), essendo ciò fatto, gli anguli AGF AGH eguali agli anguli ACB ACD (§ 30); saranno i lati GF GH parallelli ai lati CB CD, e perciò il piano de' primi, cioè il triangulo FGH parallello al piano de' secondi, cioè al triangulo BCD; dal che essendo AE a questo normale (§ 219); sarà parimente normale al triangulo FGH; sicchè negandosi la congruenza di AE con aI, e così l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati; verrà parimente a dirsi, che dallo stesso comun vertice A siansi su lo stesso piano calate due normali; locchè ripugnando, sarà vera la congruenza degli assi, e perciò l'eguaglianza degli anguli, che questi fanno ne' rispettivi lati; Saranno dunque assolutamente, e relativamente eguali &c. C. D. D.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

§. 223. *Nel Dodecaedro gli assi si dividono tutti nel medesimo punto bifariam, e sono eguali, e quel punto si è il centro del Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Figura solida.

I. Due qualunque contigui anguli del Dodecaedro siano segnati con A B, e l'angulo opposto ad A con S, l'opposto a B con T, si credano tirati gli assi AS BT, ed unit'i punti AT BS.

Gli anguli S T opposti per costruzione ai due contigui A B debbono esser parimente contigui, e perciò tramezzati dal lato ST opposto ad AB (§ 193), e perciò allo stesso parallello (§ 208); ma son questi anche eguali (§ 1); dunque ABST è parallellogrammo; ma se gli assi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 196) son le diagonali di sì fatto parallellogrammo AS BT assi del Dodecaedro; questi dunque si dividono in un punto O *bifariam*. Collo stesso

metodo ſi dimoſtra, che collo ſteſſo AS ſi dividano *bifariam*, e perciò nello ſteſſo punto O gli aſſi degli altri due anguli parimente contigui allo ſteſſo angulo A (§ 8), e che con quelli di queſti primi quattro anguli ſi dividano *bifariam*, e perciò nello ſteſſo punto O gli altri ſei aſſi, che calanſi da altri ſei anguli contigui ai tre, che ſon contigui ad A; ma dieci ſon gli aſſi del Dodecaedro; tutti dunque ſi dividono nello ſteſſo punto O *bifariam*.

II. Nel triangulo ABO vi ſon gli angul' in A B eguali perchè fatti dagli aſsi ne'lati; eguali ſon dunque i lati AO BO, cioè i ſemiaſsi, e perciò anche gli aſsi.

III. Il punto, in cui tutti gli eguali aſsi ſi divídon *bifariam* equidiſta dagli anguli tutti del Dodecaedro; ma equidiſtando dagli anguli ſi moſtra equidiſtar parimente dai piani, e lati tutti dello ſteſſo, come nel (§ 75); quel punto dunque ſi è il centro del Dodecaedro; e perciò nel Dodecaedro gli aſsi &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 224. Al Dodecaedro dunque è circoſcrittibile, ed iſcrittibile la Sfera; e l'aſſe del Dodecaedro è lo ſteſſo, che l'aſſe della Sfera circoſcrittibile ad eſſo, ed *inverſe* quello della Sfera è lo ſteſſo, che l'aſſe del Dodecaedro iſcrittibile in eſſa.

COROLLARIO II.

§. 225. Avendo veduto, che le normali calate dal centro del Dodecaedro incontrino i ſuoi piani tutti nel centro, come nel (§ 75); lo ſteſſo farà la Sfera iſcritta nel medeſimo.

COROLLARIO III.

§. 226. Eſſendo nel Dodecaedro parallell' i piani oppoſti, le normali, che dal ſuo centro calans' in due ſuoi piani oppoſti debbono eſſer in diretto, e così formare una retta, che, ſiccom' è diametro della Sfera al Dodecaedro iſcrittibile, così ſi dirà anche diametro del Dodecaedro;

ſicchè il diametro del Dodecaedro è lo ſteſſo, che quello della Sfera iſcrittibile in eſſo, ed *inverſe*.

COROLLARIO IV.

§. 227. Se da punto a punto non può tirarſi, che una retta, nel Dodecaedro la retta, che unisce i centri di due ſuoi piani oppoſti è ad eſsi normal' e paſſa pel centro del Dodecaedro; ed è perciò un ſuo diametro.

COROLLARIO V.

§. 228. Nel Dodecaedro i diametri ſono eguali, e tutti nel centro s'interſegan *biſariam*.

COROLLARIO VI.

§. 229. Il notato parallellogrammo ABST, ed ogni altro, che ſimilmente naſce nel Dodecaedro unendo gli eſtremi corriſpondenti di due ſuoi lati oppoſti, cioè quello, che naſce tra due pentagonali ſeconde (§ 217), e due ſuoi lati oppoſti

posti, è rettangulo, avendo per diagonali due eguali assi del Dodecaedro; dal che 1.° sarà nel Dodecaedro il quadrato dell' asse eguale ai quadrati del lato, e della pentagonale seconda. 2.° Ognuno di sì nati rettanguli è equale al quadrato della pentagonale prima (§ 214).

COROLLARIO VII.

§. 130. Nel Dodecaedro gl'interni suoi rettilinei sono equidistanti dal centro, giacchè eguali son le parti, che questi tagliano dagli eguali semiassi, che son ad essi normali (§ 219).

PROPOSIZIONE VI.

§. 231. *Nel Dodecaedro l' ass' è maggior del doppio del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

A B C D E F G H

Sia AB pentagonale seconda CD prima EF lato, GH asse dello stesso Dodecaedro.

Essen-

Essendo per ipotesi AB pentagonale seconda CD prima, sarà AB la stessa, che la sottes' all' angulo del pentagono regolare fatto in CD (§ 212), e perciò il quadrato di AB sarà maggior del doppio del quadrato di CD; ma per la stessa ragione il quadrato di CD è maggior del doppio del quadrato del lato EF (§ 198); dunque il quadrato di AB è molto maggior del quadruplo del quadrato del lato EF, e perciò AB è molto maggior del doppio del lato EF; ma il quadrato dell' asse GH supera il quadrato della pentagonale seconda AB per lo stesso quadrato del lato EF (§ 229); l'asse dunque GH è anche dippiù maggior del doppio del lato EF. C. D. D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 232. *Se s'intendano nel Dodecaedro tutti tirat'i suoi assi resterà diviso in dodici piramidi pentagone simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Tutto si dimostra, come s'è il simile dimostrato dell' Ottaedro (§ 103).

CO-

COROLLARIO I.

§. 233. I Dodecaedri ſon duodecupli delle riſpettive piramidi pentagone, e perciò ſon come quelle.

COROLLARIO II.

§. 234. Eſſendo l'altezza d'ogni sì nata piramide pentagona il ſemidiametro del Dodecaedro; ſarà il Dodecaedro eguale alla piramide, che à la baſe eguale alla ſua ſuperficie l' altezza eguale al ſuo ſemidiametro.

COROLLARIO III.

§.235. Ma lo ſteſſo può dirſi della piramide regolare del Cubo, dell'Ottaedro; ſarà dunque a queſt' il Dodecaedro in ragion compoſta da quella delle ſuperficie, e de' ſemidiametri.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 236. *I Dodecaedri ſon in ragion triplicata de' lati.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Son, come le rispettive piramidi pentagone (§ 233); ma queste son anche relativamente simili, tali essendo le basi, perchè pentagoni regolari, tal'i trianguli superiori, avendo ciascuno due anguli di quelli, che formano gli assi de'Dodecaedri ne' rispettivi lati, e son questi assolutamente, e relativamente eguali (§ 222), e perciò sono in ragion triplicata de'lati omologhi, quali son i lati de' rispettivi Dodecaedri; son dunque i Dodecaedr' in ragion triplicata de'lati. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 237. Dalla simiglianza anche relativa delle piramidi pentagone de'Dodecaedri, segue, che siano in essi, come i lati i semiassi, ed i semidiametri, e perciò anche gli assi, i diametri.

CO-

COROLLARIO II.

§. 238. Ed essendo in esi gli asi, i diametri asi delle Sfere circoscritte, ed iscritte; saranno i Dodecaedri, come le Sfere circoscritte, ed iscritte.

PROPOSIZIONE IX.

§. 239. *Il Dodecaedro circoscritto sta all' iscritto alla stessa Sfera, come la Sfera circoscritta all' iscritta allo stesso Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimostra dal (§ pr), come nel (§ 110).

LEMMA.

§. 240. *Nel Dodecaedro le corde sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Siano AB EF quattro pentagoni dello stesso Dodecaedro aderenti nelle comuni basi CD GQ in modo, che serbino tra loro Fig. 14.

loro quella inclinazione, che ànno nel Dodecaedro, coſicchè le rette EF HK, che ne uniſcono i centri, ci eſibiſcano due corde, ed AB EF, che uniſcono i vertici alle comuni baſi oppoſte due pentagonali ſeconde dello ſteſſo Dodecaedro. Dai punti AB EF ſi calino ſu le riſpettive comuni baſi quattro perpendiculari, queſte dovranno convenire in L I punti medii di quelle, e paſſare per gli riſpettivi centri (§ 11).

Eſſendo ne' pentagoni regolari, ed eguali eguali le altezze (§ 12); e nel Dodecaedro eguali le pentagonali ſeconde (§ 212); ſaranno i trianguli ABL EFI relativamente equilateri; eguali avranno dunque gli anguli in L I; ma ſon ne' trianguli ELF HIK eguali anche i lati EL LF HI IK (§ 12); eguali ſon dunque le corde EF HK; lo che avendo ſempre luogo; ſaranno nel Dodecaedro tutt' eguali le Corde. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 241. De' centri de' Pentagoni del Dodecaedro convenuti nello ſteſs' angulo del

del medeſimo ognuno equidiſta dagli altri due; le corde dunque di sì fatti pentagoni comprendono un triangulo equilatere ſotto quell' angulo (§ 156).

COROLLARIO II.

§. 242. Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde ſi avranno venti trianguli equilateri di lati eguali ſotto i venti anguli del Dodecaedro.

COROLLARIO III.

§. 243. Ma sì fatti venti trianguli naſcono da ſole trenta corde (§ 15); naſcon dunque così aderenti nel Dodecaedro dalle corde i trianguli, che comprendano un Solido, avente gli anguli ne' centri de' piani del Dodecaedro.

COROLLARIO IV.

§. 244. Ma eſſendo ogni pentagono del Dodecaedro aderente ad altri cinque pentagoni del medeſimo (§ 5) ſi troveranno nel centro d' ogni pentagono del

Do-

Dodecaedro, tirate in esso tutte le corde, cinqu' estremi di corde, che ivi comprendono cinque anguli di trianguli equilateri (§ 241) gli anguli dunque del Solido, che nasce nel Dodecaedro dalle corde son tutti compresi da cinque anguli di trianguli equilateri.

AVVERTIMENTO.

§. 245. I piani, che aderiscono in modo, da restarne ogni di lor lato a due di essi comune (come fanno i trianguli nati nel Dodecaedro dalle corde, restando compresi venti trianguli da trenta corde) non possono non comprendere un Solido; giacchè ove si dica lo spazio non terminato da uno di quei piani, debbono ivi ammetterssi dei termini, dei quali ciascuno ad un solo di quei piani appartenga; locchè è contro l'ipotesi.

PROPOSIZIONE X.

§. 246. *Tirate nel Dodecaedro tutte le corde resta in esso iscritto un Icosaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nel Dodecaedro tutte le corde naſce in eſſo un Solido terminato da venti eguali triangoli equilateri (§ 243); ma ſon queſti così combinati, che da cinque de' di loro angoli ſia compreſo ogni angolo di tal Solido (§ 244); Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde naſce in eſſo un Icoſaedro; ma à queſto gli angol' in tutt' i piani del Dodecaedro; Tirate dunque nel Dodecaedro tutte le corde reſta in eſſo iſcritto un Icoſaedro (§ 16) C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 247. Avendo l' Icoſaedro nato nel Dodecaedro dalle corde i ſuoi angoli ne' centri de' piani del Dodecaedro (§ 144); ed eſſendo eguali nel Dodecaedro le rette, che uniſcono i centri de' ſuoi piani oppoſti, ed interſegandoſi tutte nello ſteſſo punto *bifariam* (§ 228); dovrem riconoſcere nell' Icoſaedro un punto equidiſtante dagli angoli; e perciò riconoſcerlo iſcrittibile alla Sfera.

COROLLARIO II.

§. 248. Incontrando l' Icoſaedro, che reſta iſcritto nel Dodecaedro dalle corde i piani di queſto tutti nel centro, come fa la Sfera iſcritta nel medeſimo; ſarà l' Icoſaedro, che iſcrivono nel Dodecaedro le corde iſcrittibile a quella Sfera, cui è circoſcrittibile il Dodecaedro.

CAPO

CAPO VI.

Dell' Icosaedro.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 249. L'Icosaedro è quel Solido Regolare terminato da venti triangoli, e perciò regolari, ed eguali, così combinati, che da cinque de' di loro angoli si comprenda ogni solido suo angolo.

COROLLARIO.

§. 250. Gli angoli solidi dell' Icosaedro son dodici, giacchè son sessanta gli angoli de' suoi piani.

DEFINIZIONE II.

§. 251. De' cinque lati, che convengono in ogni angolo dell' Icoſaedro ſe ne dirà ciaſcuno inſiſtente a quei due, che non li ſono contigui (cioè, co' quali non appartiene allo ſteſſo triangolo) al piano, che paſſa per eſſi, ed all' angolo, che comprendono.

DEFINIZIONE III.

§. 252. Si diran lati oppoſti dell' Icoſaedro quelli, che inſiſtono a quegli angoli di due ſuoi triangoli aderenti, che ſi oppongono alla comune lor baſe.

AVVERTIMENTO.

§. 253. In ſeguito della ſteſſa già notata uniformità dalla regolarità inſeparabile ſi oſſerva, che nell' Icoſaedro, egualmente, che nel Dodeacedro, quei lati, che da una banda inſiſtono a quegli angoli di due ſuoi triangoli aderenti, che ſi oppongono alla comune lor baſe, lo ſteſſo

ſteſſo facciano cogli altri eſtremi dall' altra banda.

COROLLARIO.

§. 254. Nell' Icoſaedro dunque ad ogni lato non ne è oppoſto, che uno.

DEFINIZIONE IV.

§. 255. Poichè ſi moſtreranno paralel' i lati oppoſti dell' Icoſaedro; potran perciò in eſſi diſtinguerſi gli eſtremi corriſpondenti, e gli alterni (§ 42); ſicchè i primi ſaran quelli, che inſiſtono a vertici oppoſti alla ſteſſa comune baſe, i ſecondi a diverſa; e quindi potran dirſi nell' Icoſaedro.

DEFINIZIONE V.

§. 256. Angoli oppoſti quelli, ne' quali ſon gli eſtremi alterni de' lati oppoſti.

AVVERTIMENTO.

§. 257. Quanto in ſeguito dell' uniformità ſi oſſerva nel Dodecaedro nelle re-

relazioni de' ſuoi lati, tanto egualmente à luogo ne' lati dell' Icoſaedro; quindi de' dieci eſtremi de' lati, che convengono nell' Icoſaedro in due ſuoi angoli oppoſti non ſoli due, ma tutti ſono alterni di lati oppoſti.

COROLLARIO I.

§. 258. Ad ogni angolo dunque dell' Icoſaedro non ne è oppoſto, che uno.

COROLLARIO II.

§. 259. Ed a due ſuoi angoli contigui debbon opporſene altri due anche contigui, ed i lati, che li tramezzano ſono oppoſti.

COROLLARIO III.

§. 260. Così parimente a tre ſuoi angoli annularmente contigui, quali ſon quelli, ne' quali ſon gli angoli dello ſteſſo ſuo triangolo debbon opporſene altri tre anche annularmente contigui, cioè, ne' quali ſon parimente i tre angoli di altro ſuo iſteſſo triangolo, ed i

lati

lati perciò del primo triangolo debbono relativamente opporſi ai lati del ſecondo.

COROLLARIO IV.

§. 261. Così finalmente, poichè ſono i lati ſteſſi dell' Icoſaedro quelli, ch' eſibiſcono gl' interni ſuoi rettilinei, e queſti ſon pentilateri (§ 21), perciò, ſiccome poſſon diſtinguerſi nell' Icoſaedro cinque angoli annularmente contigui, quelli cioè, ne' quali ſon gli angoli d' uno ſteſſo ſuo interno pentilatere; così dobbiam dire, che a cinque tali angoli debbano opporſene altri ſimili cinque, cioè, ne' quali anche ſiano gli angoli di altro ſuo interno pentilatere; dal che potran dirſi nell' Icoſaedro.

DEFINIZIONE VI.

§. 262. Triangoli, o pentagoni oppoſti quelli, che ſon terminati da lati relativamente oppoſti.

DEFINIZIONE VII.

§. 263. Si diranno assi dell' Icosaedro quelli, che uniscono due suoi angoli opposti.

COROLLARIO I.

§. 264. Gli assi uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 256), e sono perciò le diagonali di quel parallelogrammo, che nascerebbe unendo gli estremi corrispondenti de' lati opposti, essendo questi paralleli (§ 42).

COROLLARIO II.

§. 265. Gli assi dell' Icosaedro son sei (§ 150).

DEFINIZIONE IX.

§. 266. Siccome si dimostreranno in un piano, e regolari gl' interni pentagoni dell' Icosaedro; così si diranno pentagonali dell' Icosaedro le corde di sì fatti suoi pentagoni.

PRO-

PROPOSIZIONE I.

§. 267. *Gl' interni rettilinei dell' Icoſaedro ſono in un piano e ſon pentagoni regolari.*

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. L'Icoſaedro è equilatere (§ 27); ed è iſcrittibile alla Sfera (§ 247); gl' interni dunque ſuoi rettilinei ſono in un piano, ed iſcrittibili al cerchio (§ 83); ma ſon queſti pentilateri (§ 21), e ſon equilateri (§ 28), ed i rettilinei equilateri, ed iſcrittibili al cerchio ſon regolari (§ 85); gl' interni dunque rettilinei dell' Icoſaedro ſono in un piano, e ſon pentagoni regolari. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 268. Gl'interni pentagoni dello ſteſſo Icoſaedro, o d' Icoſaedri di lati eguali ſon anche ſimili, ed eguali (§ 20, e 28), e quelli d' Icoſaedri di lati ineguali ſolo ſimili; e così del pari può dirſi, che le piramidi angolari dello ſteſſo Icoſaedro,

o d'Icoſaedri di lati eguali ſian ſimili, ed eguali, e quelle d'Icoſaedri di lat' ineguali ſolo ſimili.

COROLLARIO II.

§. 269. Le pentagonali dell'Icoſaedro ſon tutt'eguali (§ 200), ed in divers' Icoſaedri ſono ai lati proporzionali(§ 199).

COROLLARIO III.

§. 270. Ad ogni pentagonale dell'Icoſaedro ſarà parallelo quel lato dello ſteſſo, che l'è oppoſto (§ 199).

COROLLARIO IV.

Fig. 8. §. 271. E poichè de' triangoli aderenti appartenenti allo ſteſſo Icoſaedro tanto i lati CA CD, quanto gli altri BA BD comprendono angoli di pentagon' Icoſaedrici, eſſendo i primi parte della baſe pentagona dell'angolo, che naſce in B, i ſecondi parte della baſe pentagona dell'angolo, che naſce in C; perciò 1.° Ogni corda pentagonale dell'Icoſaedro unisce

di

di due ſuoi triangoli aderent'i vertici oppoſti alla comune lor baſe; e perciò uniſce gli eſtremi corriſpondenti de' lati oppoſti (§ 255). 2.° Ogni pentagonale dell' Icoſaedro potrà conſiderarſi appartenere a due pentagoni del medeſimo; dal che dovranno ad ogni pentagonale opporſi due lati dell' Icoſaedro (§ 198), ed eſſer perciò, come lo ſono a quella (§ 199) anche tra ſe paralleli.

AVVERTIMENTO.

§. 272. Si noti, che i lati, che nell' Icoſaedro inſiſtono a quegli angoli de' ſuoi triangoli aderenti, che ſi oppongono alla comune lor baſe, i lati, cioè, oppoſti dell'Icoſaedro (§ 253), ſon quelli, che ſi oppongono alla ſteſſa ſua pentagonale. Figura ſolida.

COROLLARIO I.

§. 273. Nell' Icoſaedro i lati oppoſti ſon paralleli; e poichè ſon pentagonali dell' Icoſaedro le rette, che in eſſo uniſcono gli eſtremi corriſpondenti de' lati oppoſti (§ 271); ſaranno anche sì fatte pentagonali parallele.

CO-

COROLLARIO II.

§. 274. Nell' Icosaedro son paralleli i triangoli, ed i pentagoni opposti.

LEMMA.

§. 275. *I dieci angoli, che fa ogni asse dell' Icosaedro ne' lati dello stesso sono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Figura solida. Convenendo negli angoli opposti dell' Icosaedro estremi alterni de' suoi lati opposti (§ 257) uniranno nell' Icosaedro estremi corrispondenti di lati opposti quelle rette, che tiransi in esso da un suo angolo agli estremi de' lati convenuti nell' angolo opposto, e saran queste perciò corde pentagonali dell'Icosaedro(§ 271), e perciò eguali (§ 269). Se si supponga dunque nell' Icosaedro tirato un asse, e le dieci corde pentagonali, che àn luogo tra ciascuno degli angoli, che unisce l'asse, e gli estremi de' lati convenuti nell'

nell' angol' oppoſto, ſi avranno dieci triangoli relativamente equilateri, come fatti da dieci eguali lati dell' Icoſaedro, dieci eguali pentagonali, e l' aſſe comune; ſarà dunque vero ciocchè D. D.

LEMMA II.

§. 276. *Nell' Icoſaedro ogni aſſe è normale alle baſi pentagone degli angoli, che unisce.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimoſtra dall' eguaglianza degli angoli, che ogni aſſe fa ne' lati dell' Icoſaedro, come nel (§ 218).

COROLLARIO.

§. 277. Dalla ſteſſa dimoſtrazione appariſce, che ogni aſſe dell' Icoſaedro incontri nel centro le baſi degli angoli, che unisce.

PROPOSIZIONE II.

§. 278. *Gli angoli, che fanno gli aſſi degli Icoſaedri ne' lati di eſſi ſon tutti aſſolutamente, e relativamente eguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si dimostra dall' assoluta, e relativa somiglianza delle angolari piramidi degl' Icosaedri (§ 268) e dall' esser normali gli assi alle basi pentagone di queste (§ pr), come nel (§ 221).

AVVERTIMENTO.

§. 279. Essendosi lo stesso dimostrato della Piramide (§ 36), dell' Ottaedro (§ 99), del Cubo (§ 150), del Dodecaedro (§ 221); potrà dirsi, che in ciascuna specie de' Solidi Regolari siano gli angoli, che fanno gli assi ne' lati di essi assolutament', e relativament' eguali.

PROPOSIZIONE III.

§. 280. *Nell' Icosaedro gli assi tutt' in un punto si dividon bifariam, e sono eguali, ed è quel punto il centro dell' Icosaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

I. S'intendano uniti gli angoli contigui A B con i diloro oppoſti M I, e perciò anche contigui (§ 259) per mezzo degli aſſi AM BI, e s' intendano unit' i punti AI BM Figura ſolida.

I lati AB, MI tramezzando angoli relativamente oppoſti ſaranno oppoſti (§ 259), e perciò paralleli (§ 273); ma ſon anch' eguali (§ 1); dunque ABMI è un parallelogrammo; di cui eſſendo diagonali gli aſſi AM BI (§ 264); dovranno queſti in un punto O dividerſi *bifariam*; ma, eſſendo allo ſteſſo angolo A contigui altri quattro angoli dell' Icoſaedro (§ 8), potrà nella ſteſſa maniera moſtrarſi, che collo ſteſſo aſſe AM ſi dividan *bifariam*, e perciò nello ſteſſo punto O altri quattro aſſi dell' Icoſaedro, e queſti non ſono, che ſei (§ 265); tutti dunque gli aſſi dell'Icoſaedro ſi dividono nello ſteſſo punto O *bifariam*.

II. Nel triangolo ABO vi ſono gli angoli in A B eguali perchè fatti dagli aſſi ne' lati; eguali ſon dunque i lati

AO

AO BO, cioè i ſemiaſſi, e perciò anche gli aſſi.

III. Il punto in cui gli eguali aſſi ſi dividon *bifariam* equidiſta dagli angoli tutti dell' Icoſaedro; ma, ſe lo ſteſſo ſi uniſchi co' centri de' piani ſi vedranno sì fatte rette ai piani normali, ed eguali; e ſe ſi uniſca co' punti medii de' lati ſi vedranno queſte altre ai lati perpendicolari, ed eguali, come nel §74; è dunque quel punto il centro dell' Icoſaedro, e perciò nell'Icoſaedro gli aſſi &c. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 281. All'Icoſaedro è circoſcrittibile, ed iſcrittibile la Sfera; e ſarà l'aſſe dell' Icoſaedro lo ſteſſo, che l'aſſe della Sfera circoſcrittibile ad eſſo; ſicchè potrà dirſi, che ſian tutt'i Solidi Regolari alla Sfera circoſcrittibili, ed iſcrittibili; e perciò eſſendo tutti equilateri (§27); potrà dirſi di tutti, che abbiano gli eſtremi de' lati convenuti nello ſteſs'angolo, nello ſteſſo piano (§83).

CO-

COROLLARIO II.

§. 282. Essendo nell'Icosaedro normali ai suoi piani le rette, che uniscono il suo centro con quelli de' piani, ed essendo in esso parallel' i piani opposti; di sì fatte rette quelle che appartengono ai piani opposti saranno in diretto; sicchè 1.° nell' Icosaedro quella retta, che unisce i centri di due suoi piani opposti è a questi normale, e passa pel suo centro; e sarà questa detta diametro dell' Icosaedro, siccom' è diametro della Sfera iscrittibile in esso; dal che il diametro dell' Icosaedro è lo stesso, che quello della Sfera iscrittibile in esso, ed *inverse*. 2.° Nell' Icosaedro son dieci i diametri, sono eguali, e tutti nel centro si dividon *bifariam*.

COROLLARIO III.

§. 283. Essendo nell' Icosaedro eguali gli assi, ed eguali le parti, che da questi tagliano gl' interni suoi pentagoni, perchè altezze delle sue simili, ed egua-

li piramidi angolari (§ 268); ſarà nell' Icoſaedro il centro equidiſtante anche dagl' interni ſuoi piani.

COROLLARIO IV.

§. 284. Avendo veduto nel parallelogrammo ABMI, ed in ogni altro, che naſce nell' Icoſaedro dalle corde, che uniſcono gli eſtremi corriſpondenti di due ſuoi lati oppoſti, eguali le diagonali, cioè gli aſſi; ſarà 1.° Ogni sì fatto parallelogrammo rettangolo. 2.° Sarà nell'Icoſaedro il quadrato dell' aſſe eguale ai quadrati del ſuo lato, e ſua pentagonale. 3.° Poichè il quadrato della corda di un pentagono regolare è maggior del doppio del quadrato del lato dello ſteſſo pentagono; ſarà nell'Icoſaedro il quadrato dell' aſſe maggior del triplo di quello del lato. 4.° Eſſendo negl' Icoſaedri le pentagonali come i lati, ſaranno in eſſi come i lati anche gli aſſi; e ſaranno in fine negl' Icoſaedr' i rettangoli, che naſcono in eſſi tra i lati oppoſti, e le pentagonali corriſpondenti aſſolutamente e relativamente ſimili.

PROPOSIZIONE IV.

§. 285. *Se s' intendano nell' Icoſaedro tutti tirat' i ſuoi aſſi reſterà diviſo in venti piramidi triangolari, ſimili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimoſtra dall'eguaglianza, ed interſezione *bifariam* degli aſſi, e diametri, come nel (§ 103).

COROLLARIO I.

§. 286. L' Icoſaedro è ventuplo d'ogni ſua sì fatta piramide.

COROLLARIO II.

§. 287. Gl' Icoſaedri ſon tra loro, come tali di loro riſpettive piramidi.

COROLLARIO III.

§. 288. Eſſendo l' altezza d' ogni sì fatta piramide il ſemidiametro dell' Icoſaedro; ſarà l' Icoſaedro eguale alla Pira-

mide, che à la baſe eguale alla ſua ſuperficie, l'altezza eguale al ſuo ſemidiametro.

COROLLARIO IV.

§. 289. Ma lo ſteſſo ſi vidde della Piramide, dell' Ottaedro, del Cubo, del Dodecaedro; ſaranno dunque i Solidi Regolari in ragion compoſta da quella delle ſuperficie, e de' ſemidiametri.

PROPOSIZIONE V.

§. 290. *Gl' Icoſaedri ſono in ragion triplicata de' lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Son gl' Icoſaedri come le di loro riſpettive piramidi triangolari (§ 287); ma ſon queſte anche relativamente ſimili (tali eſſendo le baſi perchè triangoli equilateri, tal' i triangoli verticali, avendo ognuno due angoli, che fanno gli aſsi ne' lati de'riſpettivi Icoſaedri), e perciò in ragion triplicata de' lati omologhi, cioè de' lati de' riſpettiv' Icoſaedri; ſon dun-

dunque gl'Icoſaedr' in ragion triplicata de' lati. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 291. Se nelle piramidi ſimili, e ſimilmente poſte ſono le altezze come i lati; ſaranno negl'Icoſaedri, come i lati anche i ſemidiametri, e perciò i diametri.

COROLLARIO II.

§. 292. Ma ſon negl' Icoſaedri come i lati anche gli aſsi (§ 284), e ſono in eſsi gli aſsi, i diametri aſsi delle sfere circoſcritte, ed iſcritte in eſsi (§ 281, e 282); ſaran dunque gl' Icoſaedri, come le sfere circoſcritte, ed iſcritte in eſsi.

PROPOSIZIONE VI.

§. 293. *L' Icoſaedro circoſcritto è all' iſcritto alla ſteſſa Sfera, come la Sfera circoſcritta all'iſcritta allo ſteſſo Icoſaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dimoſtra dal (§ pr.), come nel (§ 110).

COROLLARIO.

§. 294. Il lato dell'Icoſaedro circoſcritto ſta a quello dell'iſcritto alla ſteſſa Sfera, come il ſuo aſſe al ſuo diametro.

LEMMA.

§. 295. *Nell' Icoſaedro la pentagonale è minor del doppio dell' altezza de' ſuoi triangoli.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 8. Appartengano allo ſteſſo Icoſaedro gli aderenti triangoli ABC DBC, e ſiano così inclinati nella comune baſe BC, che la retta AD, che ne uniſce i vertici a quella oppoſti eſibiſca la pentagonale dello ſteſſo Icoſaedro (§ 271). Dai punti A D ſi calino ſu la comune baſe BC due perpendiculari, queſte converranno nel ſuo punto medio M, e formeranno così con AD un triangolo (§ 11).

Ne'

Ne' triangoli ogni lato è minor della ſumma degli altri due ; dunque AD è minor della ſumma di AM MD ; ma queſte, come altezze di eguali triangoli equilateri ſono eguali ; dunque AD pentagonale dell' Icoſaedro è minor del doppio di DM altezza di un triangolo del medeſimo. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 296. Che debbano le altezze AM DM comprendere un angolo, e quindi formar con AD un triangolo, come ſi è fatto dalla figura eſibire, appariſce dall' eſſer ogni triangolo dell' Icoſaedro non in diretto, ma inclinato cogli altri aderenti, altrimente ſarebbe l'Icoſaedro terminato in qualche parte da rombo, e non triangolo, e dal non poter avere una retta parte in un piano, e parte in un' altro.

COROLLARIO.

§. 297. Sicchè nell' Icoſaedro il quadrato della pentagonale è minor del quadruplo di quello dell' altezza di un ſuo triangolo.

PROPOSIZIONE VII.

§. 298. *L'asse dell' Icosaedro è minor del doppio del lato del medesimo.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 17. Rappresenti ABIM uno di quei rettangoli, che fanno nell' Icosaedro le sue pentagonali, che uniscono due lati opposti di esso (§ 284); cosicchè siano AB IM, lati, AI BM pentagonali; ed in questo sii tirata la diagonale AM asse dello stesso Icosaedro (§ 284); e rappresenti parimente RST un triangolo dello stesso Icosaedro, in cui sii calata l' altezza TV.

Per la costruzione AMq = ABq + BMq, ed RTq = RVq + VTq; sicchè sarà AMq: RTq :: ABq. + BMq : RVq + VTq; ma per la stessa costruzione AB = RS, e perciò ABq è quadruplo di RVq; BMq è minor del quadruplo di VTq (§ pr); dunque AMq è minor del quadruplo di RTq, e perciò AM asse è minor del doppio di RT lato dello stesso Icosaedro. C. D. D.

CO-

COROLLARIO I.

§. 299. Il quadrato dell' aſſe dell' Icoſaedro è maggior del triplo (§ 288), minor del quadruplo del quadrato del lato dello ſteſſo.

COROLLARIO II.

§. 300. Il lato dell' Icoſaedro è maggiore del ſemiaſſe del medeſimo, o ſia ragio della Sfera circoſcrittibile ad eſſo (§ 281).

LEMMA I.

§. 301. *Nell' Icoſaedro ogni corda è parallela ad una ſua pentagonale, ed è la terza ſua parte.*

DIMOSTRAZIONE.

ABC DBC rappreſentino due triangoli dello ſteſſo Icoſaedro, così aderent' in BC, che la retta EF, che ne unisce i centri, esibiſca la corda dello ſteſſo Icoſaedro, e la retta AD, che unisce i ver- Fig. 8.

vertici alla comune baſe oppoſti la pentagonale del medeſimo (§ 271). Dai punti A D ſi calino ſu la comune baſe due perpendiculari, queſte paſſaranno per gli riſpettivi centri, e converranno nello ſteſſo ſuo punto medio M (§ 11).

I. La corda EF dividendo proporzionalmente (§ 37) i lati AM DM del triangolo ADM, ſarà parallela alla pentagonale AD altro ſuo lato.

II. E ſarà perciò AD : EF :: AM : ME; ma AM : ME :: come 3 : 1 (§ 38); dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 302. Nell' Icoſaedro è parallela alla corda quella ſua pentagonale, che uniſce i vertici di quei triangoli, de' quali la corda uniſce i centri.

COROLLARIO II.

§. 303. Le corde nell' Icoſaedro ſon tutt' eguali; e negl' Icoſaedri ſono alle pentagonali, e perciò anche ai lati (§ 269) proporzionali.

LEMMA

LEMMA I.

§. 304. *Le corde, che uniſcono i centri di quei triangoli convenuti nello ſteſs' angolo dell' Icoſaedro ſon in un piano, e comprendano un pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

ABCDEF rappreſenti quella piramide pentagona, che taglia da un Icoſaedro la baſe pentagona BCDEF del ſuo angulo A; ſiano ne' triangoli convenuti nell' angolo A tirate le corde, e nel ſottopoſto pentagono BCDEF le pentagonali. Fig. 11.

Le corde GH HI ſon parallele alle pentagonali BD CE (§ 302); il piano dunque dell' angolo GHI è parallelo al piano delle pentagonali, cioè del pentagono BCDEF; ſimilmente le corde IK KL ſon parallele alle pentagonali DF EB, e perciò il piano dell' angolo IKL è parallelo al piano di quelle pentagonali, e così allo ſteſſo piano del pentagono; i piani dunque degli angoli GHI IKL

IKL ſono un iſteſſo piano, altrimente ſarebbero anche paralleli tra loro, e ſi ſarebbero incontrati; ma nello ſteſſo piano di queſti angoli pogia gli eſtremi la quinta corda GL; tutte dunque sì fatte corde ſon nello ſteſſo piano.

II. Ma queſte ſono eguali, e comprendono angoli a quelli del pentagono eguali, eſſendo ciaſcuna coppia di eſſe perchè parallela ad una coppia delle ſottopoſte pentagonali, parallela del pari alla coppia de' lati del pentagono a quelle oppoſti; comprendono dunque un pentagono regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 305. Tirate dunque nell' Icoſaedro tutte le corde reſtaranno in eſſo deſcritti ſotto i dodici ſuoi angoli ſolidi dodici pentagoni regolari di lati anche relativamente eguali (§ 303).

COROLLARIO II.

§. 306. Ma sì fatti dodici pentagoni naſcono da ſole trenta corde (§ 15); naſcono dunque così aderenti nell' Icoſaedro

ſaedro dalle corde i pentagoni, che comprendano un Solido (§ 245) avente gli angoli ne' centri de' piani dell'Icoſaedro.

COROLLARIO III.

§. 307. Ma eſſendo ogni triangolo dell' Icoſaedro aderente ad altri tre triangoli del medeſimo, ſi troveranno nel centro d' ogni triangolo del medeſimo, tirate in eſſo tutte le corde, tre eſtremi di corde, che ivi comprendono tre angoli di quei pentagoni; gli angoli dunque del Solido, che naſce nell' Icoſaedro dalle corde ſon tutti compreſi da tre angoli de' ſuoi pentagoni.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 308. *Tirate nell' Icoſaedro le ſue corde reſta in eſſo iſcritto un Dodecaedro.*

DIMOSTRAZIONE.

Tirate nell'Icoſaedro le ſue corde naſce in eſſo un Solido terminato da dodici eguali pentagoni regolari, avente gli

gli angoli ne' centri de' piani dell' Icosaedro (§ 306), e restando ognun de' suoi angoli compreso da tre angoli de' suoi pentagoni (§ pr); tirate dunque nell' Icosaedro le sue corde resta in esso iscritto un Dodecaedro (§ 185), C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 309. Incontrando il Dedecaedro iscritto nell' Icosaedro i piani di questo tutti nel centro, come fa la Sfera iscritta nel medesimo; sarà il Dodecaedro iscritto all' Icosaedro iscrittibile a quella Sfera, cui è l' Icosaedro circoscrittibile.

COROLLARIO II.

§. 310. Ma lo stesso si vidde nel Solido nato dalle corde nella Piramide, nel Cubo, nell' Ottaedro, nel Dodecaedro; sarà dunque ogni Solido Regolare nato in un altro dalle corde iscrittibile a quella Sfera, cui è quello circoscrittibile.

COROLLARIO III.

§. 311. I lati dell'Icosaedro circoscritto, e Dodecaedro iscritto alla stessa Sfera son, come il lato di un pentagono regolare alla terza parte della corda dello stesso pentagono (§ 301).

AVVERTIMENTO.

§. 312. Stabilitosi, che tutt' i Solidi Regolari comprendano il di loro centro, ch' è il fondamento della uniformità ad essi essenziale; e che sian perciò tutti alla Sfera iscrittibili; si vedrà, come corollario di sì fatta generale iscrittibilità, da quali, e quanti regolari rettilinei sia la superficie Sferica commensurabile, o sia in quali, e quanti eguali, e regolari curvilinei possa la medesima giustamente dividersi.

AVVERTIMENTO I.

§. 313. Un rettilineo si dirà adattato nella Sfera, se così sia immesso in essa, che tutt' i suoi angoli ne tocchino la

su-

ſuperficie; ſicchè adattati nella Sfera ſon tutt' i rettilinei de' ſolid' iſcritti in eſſa.

AVVERTIMENTO II.

§. 314. Se adattato nella Sfera un rettilineo ſi tirino agli angoli di eſſo tanti ragi della Sfera, e dai piani dei triangoli, che i ragi fanno nei lati del rettilineo, ſi faccia tagliare la ſuperficie Sferica, la parte, che da eſſa tagliano sì fatti piani, potrà dirſi un curvilineo sferico.

AVVERTIMENTO III.

§. 315. Se iſcritto nella Sfera un Solido Regolare ſi rinnovi la ſteſſa operazione in tutt' i ſuoi piani; reſterà diviſa la ſuperficie Sferica in tanti curvilinei sferici, quanti ſono i piani del Solido Regolare; reſterà perciò diviſa in quattro, otto, o venti triangoli Sferici, ſe ſia nella Sfera iſcritta una Piramide, un Ottaedro, un Icoſaedro, e reſterà diviſa in ſei quadrati Sferici, o dodici pentagoni Sferici, ſe ſia nella ſteſſa iſcritto un Cubo, o un Dodecaedro.

AV-

AVVERTIMENTO IV.

§. 316. Il Solido Regolare con tale operazione resterà diviso in quelle piramidi, nelle quali, è diviso da' suoi assi (1), e perciò simili, ed eguali (2); Or se a ciascuna di queste si consideri aggiunto quel Solido, ch' è compreso dalla base della Piramide, dal Curvilineo, ed archi corrispondenti, si vedrà sorto un Solido, che potrà dirsi una Piramide Sferica.

AVVERTIMENTO V.

§. 317. Iscritto nella Sfera un Solido Regolare, resterà la Sfera colla disegnata operazione divisa in tante piramidi Sferiche, quanti sono i piani del Solido; e son queste simili, ed uguali; im-

M per-

(1) Giacchè ne' Solidi regolari gli assi son gli stessi, che gli assi delle Sfere ad essi circoscrittibili; sicchè tutti, ed in tutti intersegandosi gli assi *bifariam*, s' intersegano nel centro della rispettiva sfera.

(2) Giacchè son tutte simili, ed eguali le piramidi, nelle qual' i solidi Regolari son divisi dagli assi.

perciocchè fatti di due di queſte combaciar gli eguali angoli verticali (2), debbono combaciarne nell' intiera loro eſtenſione tutti i piani ſuperiori, come fatti da due eguali ragi, ed un arco ſimile, ed eguale; ed ove ſi negh' il combaciamento anche de' Curvilinei sferici, ſi ammetteranno nella sfera de' ragi ineguali, giacchè i vertici di sì fatte piramidi non ſono, che nel centro della Sfera (§ 316).

COROLLARIO I.

§. 318. Siccome ſon tali le Piramidi, nelle quali reſta diviſo un Solido Regolare da ſuoi aſſi, che ſoprappoſtine gli angoli verticali debbono combaciare qualunque piano di una ſi faccia corriſpondere a qualunque piano dell' altra; eſſendo eguali, e ſimili aſſolutamente, e relativamente tutti i triangoli ſuperiori, regolari, ſimili, ed eguali le baſi (§ 1); così perchè dacciò lo ſteſſo onnimodo combaciamento deve aver luogo anche nelle

(2) Giacchè ſon tutte ſimili, ed eguali le piramidi, nelle qual' i ſolidi Regolari ſon diviſi dagli aſsi.

nelle Sferiche Piramidi figlie dello ſteſſo Solido Regolare; dovrem dire, che i curvilinei Sferici, nei quali reſta diviſa la ſuperficie Sferica colla diſegnata operazione, ſiano non ſolo ſimili, ed eguali, ma che poſſano meritare il nome di curvilinei sferici, regolari.

COROLLARIO II.

§. 319. Il triangolo dunque Sferico Piramidale è la quarta parte della ſuperficie Sferica; l' Ottaedrale l'ottava, l' Icoſaedrico la vigeſima; il quadrilatere Sferico Cubico la ſeſta, il pentilatere Sferico Dodecaedrico la duodecima, dal che anche conoſceſi qual ragione ciaſcuno di queſti abbia col cerchio maſſimo della Sfera.

COROLLARIO III.

§. 320. Dal che ſaranno queſti, nati nella ſteſſa Sfera, tra loro in ragion inverſa de'denominatori delle frazioni, dalle quali s' è veduta la di loro capacità additata; ſicchè ſarà il triangolo Sferico

Piramidale all'Ottaedrale :: 8 : 4 = 2 : 1 all' Icosaedrico : : 20 : 4 = 5 : 1; al quadrilatere Cubico : : 6 : 4 = 3 : 2; al pentilatere Dodecaedrico : : 12 : 4 = 3 : 1; e così negli altri.

COROLLARIO VI.

§. 321. Sarà dunque la Superficie Sferica esattamente commensurabile da quei soli curvilinei sferici regolari, che colla disegnata operazione nascono, iscritt' in essa i Solidi Regolari.

CAPO VII.

E' de' ſoli piani, e Solidi Ordinati, o Regolari il comprendere il centro.

§. 222. VEdutoſi ne' Capi precedenti, che ciaſcun Piano, e Solido Ordinato, o Regolare comprenda il centro; ſi vedrà in queſto, che ſe un rettilineo, o un Poliedro lo comprenda ſia Ordinato, o Regolare; e ſi conoſcerà così, eſſer de' ſoli piani, e Solidi Ordinati, o Regolari il comprenderlo; ed eſſer perciò dell'eſſenza dell'Ordine, e della Regolarità il comprendere un punto sì fatto.

DEFINIZIONE.

§. 323. Un Solido terminato da piani, che comprenda un punto, come s'è veduto ne' Solidi Ordinati, o Regolari, equidiſtante dagli angoli, dai piani, dai

lati, si disegnerà col nome di Solido dell' ipotesi; quel punto sarà detto suo centro; le rette, che l' uniscono cogli angoli, o, che da esso calansi ai suoi piani normali si diranno semiassi di circoscrizione, e semidiametri d'iscrizione dello stesso.

COROLLARIO.

§. 324. Se il Solido dell'ipotesi è terminato da piani i suoi lati son linee rette, i suoi piani son rettilinei.

LEMMA I.

§. 325. *Se un rettilineo comprenda un punto equidistante dagli angoli, e dai lati è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 18. Nel rettilineo ABCDE sia il punto F equidistante dagli angoli, e dai lati. Sia unito questo agli angoli, e sian dallo stesso calate ai lati le perpendiculari.

Essendo per l' ipotesi F centro del rettilineo ABCDE, saranno isosceli i triangoli

goli FAB FBC FCD, FDE FEA; e perciò saranno i lati del rettilineo divisi *bifariam* dai suoi ragi d'iscrizione FG, FH, FI, FK, FL; ma essendo per la costruzione lo stesso quadrato di FA eguale tanto a quelli di AG, e GF, quanto a quelli di AL, e LF, e così quei due eguali a questi; ed essendo per l'ipotesi eguali quelli di FG FL; eguali saranno anche gli altri di AG AL, e perciò AB è eguale ad AE; locchè avendo egualmente luogo negli altri lati tutti; sarà il rettilineo ABCDE equilatere. Ma il rettilineo equilatere, ed iscrittibile al cerchio, com' è questo per l'ipotesi, è rogabile (§ 85); se un rettilineo dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 326. E' dunque de' soli rettilinei Ordinati, o Regolari il comprendere un punto dai lati, e dagli angoli equidistante.

LEMMA II.

§. 327. *Son tutti egual' i lati del Solido dell' ipotesi.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 19. Siano AB AC due lati qualunque convenut' in un angolo A del Solido dell'ipoteſi, e ſia O il centro di queſto; ſi uniſchi queſto co' punti ABC, e ſi calino dallo ſteſſo ſu i lati AB AC le perpendicolari OD OE.

Eſſendo nel Solido dell' ipoteſi il centro equidiſtante dagli angoli (§ 323); farà equidiſtante dagli eſtremi de' lati; che non ſon, che negli angoli; ſaranno dunque eguali le rette OA OB OC; e così eſſendo i triangoli OAB OAC iſoſceli, ſaranno in eſſi i lati AB AC diviſi *bifariam* dai ragi d' iſcrizione OD OE; ma per la ſteſſa coſtruzione lo ſteſſo OAq. eguaglia tanto i quadrati di OD DA, quanto quelli di OE EA, e ſono eguali quelli di OD OE, perchè miſure delle diſtanze, che ànno dal centro i lati del Solido delle ipoteſi; ſon dunque eguali anche quelli di AD AE, e perciò AB è eguale ad AC; ma nella ſteſſa maniera ſi moſtrano a queſti eguali quegli altri lati convenuti negli ſteſſi

an-

angoli ABC, ed a quelli gli altri, e così tutti; ſon dunque tutti egual' i lati del ſolido dell' ipoteſi. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 328. I rettilinei del Solido dell' ipoteſi ſon tutti aſſolutamente, e relativamente equilateri.

COROLLARIO II.

§. 329. Le perpendiculari, che dal centro del Solido dell'ipoteſi ſi calano ai ſuoi lati, ne incontrano il punto medio; e perciò le rette, che in queſto Solido uniſcono il centro co' punti medii de' lati ſono a queſti perpendiculari, e ſono eguali.

COROLLARIO III.

§. 330. Eſſendo queſto Solido equilatere, ed iſcrittidile alla Sfera; ſaranno gl' interni ſuoi rettilinei in un piano, ed iſcrittibili al cerchio (§ 83).

LEMMA

LEMMA III.

§. 331. *La normale calata dal centro del Solido dell' ipotesi in qualunque suo piano ne incontra un punto equidistante dagli angoli, e dai lati.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 20. Il rettilineo ABCD disegni un piano del solido dell'ipotesi, e disegni E il suo centro; da questo sii in quello calata la normale EO; il punto O sia unito agli angoli del rettilineo, e calate dallo stesso ai lati del rettilineo le perpendiculari OF OG OH OI, si unisca il punto E co' punti ABCD FGHI.

I. Essendo nel Solido dell' ipotes' il centro equidistante dagli angoli; saranno eguali le rette, e perciò i quadrati di AE BE CE DE, dal che saranno per la costruzione eguali le summe de' quadrati di AO EO, BO EO, CO EO, DO EO; sicchè tolto il comune di EO, resteranno egual' i quadrati, e perciò le rette AO BO CO DO; la normale dun-

que

que calata dal centro del Solido dell'ipotes' in qualunque ſuo piano ne incontra un punto equidiſtante dagli angoli.

II. Dacciò ſaranno i triangoli AOB BOC COD DOA iſoſceli, e perciò le perpendiculari da O calate ai lati AB BC CD DA ne avranno incontrat'i punti medii, e così le rette EF EG, EH EI ſono eguali (§329); dal che, come nella prima parte ſi vedono egual' i quadrati, e perciò le rette OF OG OH OI; la normale dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 332. I piani del Solido dell'ipoteſi comprendono un punto equidiſtante dagli angoli, e dai lati; e per ciò ſono iſcrittibili, e circoſcrittibili al cerchio.

COROLLARIO II.

§. 333. Eſſendo il triangolo AEO rettangolo in O; ſarà il quadrato del ragio di circoſcrizione del rettilineo del Solido dell'ipoteſi la differenza de' quadrati del ſuo ſemiaſſe AE, e del ſuo ſemidiametro

tro EO; ma ſono in queſto Solido eguali i ſemiaſſi, i ſemidiametri (§ 323); ſon dunque de'rettilinei dello ſteſſo egual' i raggi di circoſcrizione; cioè ne ſono i rettilinei iſcrittibil' in archj eguali.

PROPOSIZIONE I.

§. 334. *I rettilinei del Solido dell' ipoteſi ſon regolari, ſimili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Comprendono queſti un punto dagli angoli, e dai lati equidiſtante (§332); ſon dunque regolari (§ 325).

II. e III. Son queſti anche relativamente equilateri (§ 328), e ſon iſcrittibili in cerchi eguali (§ pr.); ma gli eguali lati dagli eguali cerchj tagliano ſimili, ed eguali porzioni; ſon dunque gli angoli di queſti anche relativamente compreſi da ſimili, ed eguali porzioni; ſon dunque anche relativamente equiangoli; e perciò non ſolo regolari, ma ſimili, ed eguali: C. D. D.

CO-

COROLLARIO.

§. 335. I rettilinei dunque affolutamente, e relativamente equilateri, ed iſcrittibil' in cerchj eguali ſono regolari, ſimili, ed eguali.

LEMMA I.

§. 336. *Gl' interni rettilinei del Solido dell' ipoteſi ſon tutti affolutamente, e relativamente equilateri.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo di queſto Solido i piani rettilinei regolari, ſimili, ed eguali (§434); ſaranno tutte affolutament', e relativament' eguali le rette, che uniſcono gli eſtremi de' lati convenuti nello ſteſſo ſuo angolo; e perciò ſaran tutti gl' interni rettilinei dello ſteſſo C. D. D. (§ 18).

LEMMA II.

§. 337. *Se in due Sfere eguali, che toccano un piano ſi adattino rett' eguali*

con

con un eſtremo nel riſpettivo punto del contatto, e dai punti ne' quali gli altri eſtremi incontrano le riſpettive ſuperficie ſi faccino ſezioni al piano parallele, queſte ſon cerchj eguali.

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 11. Le date Sfer' eguali ſiano ABC DEF, che toccano il piano MN ne' punti BE, l' eguali rette in eſſe adattate ſiano BC EF, e ſiano in fine CI FK le ſezioni, che paſſando per gli riſpettivi punti CF ſono parallele ad MN.

Dai punti B E ſiano tirat' i diametri AB DE, che incontrano le riſpettive ſezioni ne' punti G H; ſiano unit' i punti CA CH, FD FG, e finalmente per gli piani de' triangoli ABC DEF ſian fatte nelle Sfere altre due ſezioni AIBC DKEF.

Le ſezioni AIBC DKEF, paſſandone ciaſcuna per coſtruzione pel diametro, e perciò pel centro della riſpettiva Sfera, ſon cerchj maſſimi delle ſteſſe; e ſon perciò AB DE i diametri di eſſi; ſicchè i triangoli ABC DEF ſon rettangoli in

C F;

C F ; e perciò essendo dall'ipotesi il quadrato di AB eguale a quello di DE ; saranno quelli di AC CB eguali a quelli di DF FE ; ma son dalla stessa ipotesi eguali quelli di BC EF ; dunque anche gli altri , e perciò le rette AC DF ; dal che saranno del tutto simili , ed egual' i triangoli ABC DEF ; ma essendo i diametri AB DE normali ad MN , son anche tali ai piani delle rispettive sezioni CI FK parallele ad MN ; passeranno dunque per gli rispettivi centri di quelle ; e saran perciò ragi di esse HC GF ; e saran questi perpendiculari ai rispettivi diametri AB DE ; ma questi son dacciò le altezze de' triangoli ABC DEF simili , eguali , e similmente posti ; son dunque eguali , e perciò sarà vero ciocchè D.D.

COROLLARIO I.

§. 338. E poichè tutte le rett' eguali a BC , ed EF adattate con un estremo in B , ed in E pogian gli altri in punti delle periferie delle rispettive sezioni CI FK (§81) ; perciò , se in due sfer'eguali siano adattate rette assolutamente , e re-

relativamente eguali cogli eſtremi di una banda in due punti di eſſe, queſte pogeranno gli altri eſtremi nelle riſpettive periferie di cerchj eguali.

AVVERTIMENTO.

§. 339. Lo ſteſſo avviene, ſe le rette aſſolutamente, e relativamente eguali ſi adattino cogli eſtremi di una banda in due punti della ſteſſa Sfera; pogeranno, cioè, queſte anche gli altri eſtremi nelle periferie di cerchj eguali; naſcendo ſempre due triangoli rettangoli ſimili, ed eguali, perchè compreſi da due eguali diametri, due eguali rette, ed altre due, che debbono anch'eguagliarſi per la notata ragione.

COROLLARIO II.

§. 340. Ma ne' lati degli ſteſſi angoli di un Solido equilatere, ed iſcrittibile alla Sfera, iſcritto in queſta, ſi avvera, che ſian convenut'in tanti punti di eſſa gli eſtremi di una banda di rette aſſolutamente, e relativamente eguali; pogeran

ran dunque queſte gli altri eſtremi nelle periferie di cerchj eguali; dal che faranno gl'interni rettilinei del Solido equilatere, ed iſcrittibile alla Sfera non ſolo in un piano, ed iſcrittibili al cerchio (§ 83); ma iſcrittibili in cerchj eguali.

PROPOSIZIONE II.

§. 341. *Gl'interni rettilinei del Solido dell'ipoteſi ſon regolari, ſimili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Son queſti aſſolutamente, e relativamente equilateri (§ 336), ed iſcrittibil' in cerchj eguali (§ pr); ſon dunque come dovean dimoſtrarſi (§ 335).

PROPOSIZIONE III.

§. 342. *Il Solido dell'ipoteſi è regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Sono i piani di queſto regolari, ſimili, ed eguali (§ 334); ma, eſſendo anche tali gl'interni ſuoi rettilinei (§ pr), da

egual numero degli angoli di quelli è compreso ogni Solido suo angolo (§ 21); è dunque regolare (§ 1) C. D. D.

COROLLARIO.

§. 343. E' dunque de' soli Solidi Regolari, od Ordinati il comprendere un punto equidistante dagli angoli, dai piani, e dai lati. E' cioè tanto agli stessi essenziale un tale attributo, che solo basta, per assicurarci, che il Solido, che lo comprende, sia Ordinato, o Regolare.

AVVERTIMENTO.

§. 344. Resta a vedersi ne' Solidi Regolari l'Uniformità degli angoli solidi, e quanto questa importi di più dell'eguaglianza; ma trattandosi, che son gli angoli di questi Solidi compresi da egual numero di angoli piani non solo relativamente, ma anche assolutament' eguali (§ 1), sembrarebbe vano un tale assunto, se non se ne premetta una teoria, che ne mostri, ciò non ostante, la necessità; questo avrà luogo nel Capo, che segue.

CAPO

CAPO VIII.

Della misura degli angoli Solidi, e De' Solidi Innominati.

§. 345. CHe ci siano degli angoli Solidi eguali, che non possano combaciare, e che ce ne sian degli altri ineguali quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali, si vedrà in questo Capo, producendo dall' accoppiamento de' Solidi Regolari, e di loro segmenti altri due Solidi, che saran detti Innominati; perchè da non potersi riferire ad alcuna delle note, e nominate Classi de' Solidi; dal che conosciutasi meno estesa del bisogno la norma, che nella stima degli angoli Solidi può desumersi dal combaciamento, e più estesa quella, che può dedursi dagli angoli piani, che li com-

prendono, ſe ne fiſſa altra all' uopo proporzionata.

PARTE I.

Della miſura degli angoli Solidi.

DEFINIZIONE I.

§. 346. DUe angoli piani ſi diranno aderenti, ſe abbiano i vertici nel medeſimo punto, ed aderiſcano per un lato, che resta ad entrambi comune; e così ſi diranno aderent' in diretto, ſe ſiano nel medeſimo piano aderenti, ed inclinatamente aderenti, ſe ſtando in diverſi piani aderiſcano.

DEFINIZIONE II.

§. 347. Più angoli piani ſucceſſivamente aderenti ſi diranno annularmente aderenti, ſe ciaſcuno ad altri due aderiſca; giacchè allora l'ultimo della ſucceſſiv' aderenza è neceſſario, che anche al primo aderiſca; e così ſi diranno queſti angoli annularmente aderenti in diretto,

ſe

ſe ſian tutti nel medeſimo piano; ed annularmente, ed inclinatamente aderenti, ſe così ſiano in piani diverſi.

DEFINIZIONE III.

§. 348. Un Solido terminato da piani à rettilinei tutti i ſuoi piani, giacchè rette ſono le interſezioni dei piani; il punto, in cui in un Solido sì fatto convengono gli angoli de' ſuoi rettilinei ſi dice angolo del Solido, o ſia angolo Solido.

COROLLARIO I.

§. 349. Gli angoli piani di un angolo Solido ſono inclinatamente aderenti; giacchè appartengono ai diverſi piani del Solido.

COROLLARIO II.

§. 350. Poichè tre ſono le dimenſioni del Solido, non potranno in un ſuo angolo convenir da meno di tre angoli de' ſuoi piani.

COROLLARIO III.

§. 351. Essendo nel Solido terminato da piani i suoi lati non altro, che le intersezioni de' suoi piani; ed essendo perciò ogni lato a due de' suoi piani comune, sarà nell'angolo di tal solido ogni lato a due de' suoi angoli piani comune; e perciò sarà in esso, 1.° il numero de' lati eguale a quello degli angoli, e non minore di tre (§ pr), 2.° sarà ogni suo angolo piano ad altri due aderente, e perciò saran tutti annularmente aderenti (§ 347); 3.° ma son anche inclinatamente aderenti (§ 349); volendo dunque astratto dal Solido concepirsi il suo angolo, dovrà dirsi, che sia l'annulare, ed inclinata aderenza di più di due angoli piani.

COROLLARIO IV.

§. 352. Essendo l'angolo solido l'annulare, ed inclinat' aderenza di più di due angoli piani, da tre capi dipenderà la quantità dello stesso; dal numero, cioè, de' suoi angoli piani; dalla grandezza

dezza di ciaſcuno di eſſi; e dall'inclinazione, con cui i piani degli angoli aderiſcono.

AVVERTIMENTO.

§. 353. Siccome, cioè, ne' rettilinei, che non ſono, che annulari, ed inclinati congiungimenti di rette, ſi deſume la di lor quantità dal numero, e grandezza de' lati, e dalle inclinazioni, che queſti ànno; così dal numero, e grandezza degli angoli piani, e dalle inclinazioni, che queſti anno deve deſumerſi la quantità degli angoli ſolidi; e ſiccome in quelli l'aſſoluta, o relativa eguaglianza degli angoli ſegue l'aſſoluta, o relativa eguaglianza dei lati ne' ſoli rettilinei compreſi da tre lati; così in queſti l'aſſoluta, o relativa eguaglianza delle inclinazioni ſi vedrà ſeguire l'aſſoluta, o relativa eguaglianza degli angoli piani, ne' ſoli angoli ſolidi compreſi da tre angoli piani.

COROLLARIO V.

§. 354. Per l' eguaglianza dunque di due angoli ſolidi è neceſſario, che ſian terminati da egual numero di angoli piani, che ſian queſti angoli relativament' eguali, e che ſiano in fine i piani degli angoli relativamente eguali egualmente inclinati. Nel che anche veggonſi co' rettilinei coſpirare.

COROLLARIO VI.

§. 355. Può dunque l' ineguaglianza di due angoli ſolidi deſumerſi da altrettanti principj, o dall' eſſer cioè, terminati da inegual numero di angoli piani, o dal non eſſer tutti queſti relativamente eguali; o dal non eſſer tutte le inclinazioni di uno relativament' eguali a tutte quelle inclinazioni dell' altro, che ſon tra piani relativament' eguali.

DEFINIZIONE IV.

§. 356. Si diranno in due angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali inclinazioni, o lati omologhi quelle, o quelli, che tramezzano angoli relativament' eguali.

COROLLARIO I.

§. 357. Potendo un angolo ſolido comprenderſi o da angoli piani tutti eguali, nel qual caſo ſarà detto equiangolo, o da angoli pian' in parte eguali, nel qual caſo ſarà detto miſto, o in fine da angoli tutt'ineguali, nel qual caſo ſarà detto ſcaleno; perciò in due angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali ogn' inclinazione di uno potrà dirſi omologa con un' altra ſola dell' altro, ſe ſiano tali angoli Solidi ſcaleni; potrà dirſi omologa con varie dell' altro, ſe ſiano miſti, e potrà in fine dirſi omologa con ciaſcuna dell' altro, ſe ſiano equiangoli.

CO-

COROLLARIO II.

§. 358. Poichè però un' angolo solido, se sia compreso da più di tre angoli piani, quando anche questi fussero eguali può avere (come si vedrà) inegual' inclinazioni de' piani; quindi, quantunque bastasse per l' ineguaglianza di due angoli solidi terminati da egual numero di angoli piani, che una sola inclinazione di uno sconvenga coll' omologa inclinazione dell' altro; non potremo esser mai sicuri di sì fatta sconvenienza, se quell' una inclinazione del primo angolo non si trovi sconvenire con tutte le omologhe inclinazioni dell' altro; ed essendo perciò quegli angoli Solidi Equiangoli, dovrà, per trovarsi ineguali, quell' una inclinazione del primo sconvenir con tutte le inclinazioni del secondo (§ pr).

AVVERTIMENTO.

§. 359. Così se due rettilinei ABCDE FGHIK(*fig.*22)sian terminati da più di tre

lati

lati assolutament' e relativament' eguali, e sia l' angolo A del primo ineguale cogli angoli G, H, I, K, del secondo; non è sicura la di loro ineguaglianza, se non quando, si scorga ineguale anche con F.

DEFINIZIONE V.

§. 360. Negli angoli Solidi compresi da più di tre angoli piani, nei quali perciò convengono più di tre lati (§ 351); potranno distinguersi i lati contigui, cioè, quelli, che appartengono allo stesso suo angolo piano, ed i non contigui, quelli, cioè, che appartengono a diversi angoli piani, e siccome possono ben dirsi esterni quegli angoli, che comprendono i lati contigui, come quelli, che sono negli esterni piani del Solido; così possono ben dirsi interni quelli, che son compresi dai lati non contigui, come quelli, che sono negl' interni piani del Solido.

AVVERTIMENTO.

§. 361. Non poſſono non comprenderſi angoli anche ne' lati non contigui, giacchè ove queſto ſi nieghi, e ſi dicano perciò quelli lati in diretto, ſi diranno in diretto anche i piani terminati da quelli, cioè, che comprendono l'angolo Solido, locchè ripugna (§ 349).

DEFINIZIONE VI.

§. 362. In ogni angolo Solido compreſo da più di tre angoli piani ogni ſuo angolo interno ſi dirà ſottopoſto a quella coppia di aderenti ſuoi angoli eſterni, che tagliarebbe dall' angolo ſolido il piano di quell' angolo interno; così nell' angolo A (fig. 23) l' interno ſuo angolo CAF sì dice ſottopoſto agli aderenti eſterni ſuoi angoli BAC BAF; e così negli angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ſi diranno omologhi quegli angol' interni, che ſon ſottopoſti ad eſterni relativamente eguali.

COROLLARIO I.

§. 363. Se gli angoli terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ſiano ſcaleni, ogni angolo interno del primo angolo ſolido non avrà, che uno interno omologo nel ſecondo; ſe ſian miſti ne avrà varj; e ſe ſiano in fine equiangoli l'avrà tutti (§ 357).

COROLLARIO II.

§. 364. Ogni angolo interno è compreſo dai lati di quegli aderenti angoli eſterni, ai quali è ſottopoſto; e perciò è ad entrambi aderente.

LEMMA I.

§. 365. *In ogni angolo ſolido compreſo da più di tre angoli piani ogni coppia di aderenti ſuoi angoli eſterni col ſottopoſtogli interno comprende un angolo ſolido.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 23. Nel ſolido angolo A compreſo da cinque angoli piani ſia l'interno angolo CAF ſottopoſto agli aderenti ſuoi angoli eſterni BAC BAF.

Eſſendo l'angolo CAF aderente ai due BAC BAF (§ pr) che ſono aderenti per ipoteſi; ſaranno tutti tre annularmente aderenti (§ 347); ma eſſendo i due BAC BAF inclinatamente aderenti (§ 349) così è con ciaſcuno di queſti anche CAF; altrimente ſarebbero nello ſteſſo piano i lati AB AC AF, e così gli angoli BAC BAF; ſon dunque tutti tre non ſolo annularmente, ma anche inclinatamente aderenti, e perciò comprendono quell'angolo ſolido, che D. D. (§351).

COROLLARIO I.

§. 366. Un angolo ſolido dunque compreſo da più di tre angoli piani potrà dai piani de' ſuoi angol' interni reſtar diviſo in tanti angoli di tre, quanti ſono i ſuoi piani meno due, cioè, in due s'è com-

compreſo da quattro, in tre ſe da cinque, e così in appreſſo; giacchè per gli ſoli membri eſtremi di sì fatta diviſione ci biſognano due angoli eſterni, ed uno interno, per gli membri medii l'oppoſto.

COROLLARIO II.

§. 367. E pel contrario ogni angolo ſolido compreſo da più di tre piani potrà dirſi nato dall'accoppiamento di tanti angoli di tre, in quanti è lo ſteſſo diviſibile, nella diviſata forma.

AVVERTIMENTO.

§. 368. Ecco perchè farà quindi detto ſemplice ogni angolo ſolido compreſo da tre piani, compoſto ogni altro compreſo da più.

COROLLARIO III.

§. 369. Gli angoli dunque interni di un angolo compoſto non ſono, che eſterni angoli de' ſuoi angoli ſemplici.

LEMMA II.

Fig. 24. §. 370. *Degli angoli piani ABC CBD inclinatamente aderent' in CB, e relativamente eguali agli angoli EFG GFH inclinatamente aderenti in FG, ſaranno i piani egualmente inclinati, che i piani di queſti, ſe l' angolo, che comprendono i lati BA BD dei primi eguagli l'angolo compreſo dai lati FE FH dei ſecondi.*

DIMOSTRAZIONE.

Dai punti C G preſi nei lati comuni equidiſtanti dal vortice riſpettivo s' inalzino ne'riſpettivi piani degli angoli quattro perpendiculari, CA CD GE GH, queſte miſureranno co' di loro angoli le inclinazioni di quei piani, e comprenderanno perciò colle rette AD EH due triangoli.

I triangoli ABC EFG ànno gli angoli in B F eguali per ipoteſi, e gli angoli in C G eguali per coſtruzione; ſon dunque equiangoli, e perciò ſimili; ma ſono in eſſi eguali per la ſteſſa coſtruzione

ne

ne gli omologhi lati BC FG; ſon dunque in eſſi eguali anche gli altri omologhi lati, cioè AB=EF, AC=EG. Nella ſteſſa maniera ſi moſtra DB=HF, e DC=HG; nei triangoli dunque ABD EFH vi ſono i lati AB BD relativamente eguali ai lati EF FH, e gli angoli in eſſi compreſi eguali per ipoteſi; eguali ne ſon dunque le baſi; e perciò ſaranno i triangoli ACD EGH relativament' equilateri; eguali ſon dunque in eſſi gli angol' in C G, cioè le inclinazioni de' piani de' quattro angoli ABC CBD EFG GFH. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 371. Gli angoli dunque ſemplici compreſi da angoli piani relativament' eguali avranno anche relativament' eguali tutte le omologhe inclinazioni de' riſpettivi piani; e perciò ſono eguali (§354).

COROLLARIO II.

§. 372. Se un angolo ſemplice ſia equiangolo avrà anch' eguali le inclina-

zioni de' ſuoi piani ; e perciò, ſe due ſemplici ſiano relativamente, ed aſſolutament'equiangoli, avranno relativamente, ed aſſolutament' eguali le inclinazioni dei piani.

AVVERTIMENTO I.

§. 373. Siccome negli angoli ſemplici all' eguaglianza degli angoli eſterni corriſponde ſempre l'eguaglianza delle omologhe inclinazioni dei piani, così lo ſteſſo non ſempre à luogo negli angoli compoſti, come appreſſo vedraſſi; ecco perchè ſi ſian quelli da queſti diſtinti.

AVVERTIMENTO II.

§. 374. Siccome dando a quelle coppie di angoli relativament' eguali anche i terzi angoli eguali ſi ſon vedute eguali le inclinazioni di quei piani; così dando alle ſteſſe eguali le inclinazioni, ſi vedranno dalla ſteſſa teoria de' triangoli, i terzi angoli eguali.

AVVERTIMENTO III.

§. 375. E ſiccome dal dare a quegli angoli anche i terzi angoli eguali ſi ſon vedute quelle inclinazioni eguali ; così dando agli ſteſſi ineguali i terzi angoli, ſi vedranno dalla ſteſſa teoria le inclinazioni ineguali; e maggiore ſi troverà in quelli, che àn maggiore il terzo angolo; ed invertendo dando ad eſſi ineguali inclinazioni, ineguali, e colla ſteſſa corriſpondenza ſi troveranno i terzi angoli.

PROPOSIZIONE I.

§. 376. *Gli eguali angoli compoſti àn relativament' eguali gli omologhi angol' interni.*

DIMOSTRAZIONE.

Degli eguali compoſti angoli A F ſiano i due angoli BAC CAD del primo relativament' eguali ai due GFH HFI del ſecondo, ſarà l'interno angolo BAD del primo omologo coll' interno angolo GFI del ſecondo (§ 362). Fig. 25.

Essendo i solidi angoli A F per ipotesi eguali, eguali avranno le omologhe inclinazioni dei piani (§ 354), e perciò sarà l'inclinazione de' piani BAC CAD eguale all'inclinazione dei piani GFH HFI; l'angolo dunque BAD eguaglia l'angolo GFI (§ 374) suo omologo; ma va lo stesso degli altri; gli eguali dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 377. Gli eguali angoli composti son divisibili in egual numero di angoli semplici relativament' eguali (§ 365).

COROLLARIO II.

§. 378. E per l'opposto può dirsi, che nascan gli eguali angoli composti dall'accoppiamento di egual numero di angoli semplici relativament' eguali, e similmente combinati.

PROPOSIZIONE II.

§. 379. *Due angoli compoſti ſono eguali ſe ſian terminati da egual numero di angoli eſterni relativamente eguali, e ſe abbiano relativamente eguali gli omologhi angol' interni.*

DIMOSTRAZIONE.

Degli angoli compoſti A F della diviſata natura ſiano i piani angoli BAC CAD del primo relativamente eguali agli angoli GFH HFI del ſecondo; ſarà per l' ipoteſi l' angolo interno BAD ai primi ſottopoſto eguale all'omologo interno GFI ſottopoſto ai ſecondi; e ſarà perciò l'inclinazione de' piani dei primi eguale all' omologa inclinazione de' ſecondi (§ 370); ma nella ſteſſa maniera ſi moſtra ogni altra inclinazione de' ſucceſſivi piani del primo angolo eguale ad ogni altra omologa inclinazione dei piani del ſecondo; gli angoli dunque A F non ſolo ſon terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; ma ànno anche Fig. 25.

relativamente eguali le omologhe inclinazioni dei piani; e perciò ſon egua-li (§ 354) C. D. D.

PROPOSIZIONE III.

§. 380. *Sono ineguali quegli angoli compoſti, ne' quali quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ſia un angolo interno di uno ineguale cogl' interni omologhi dell' altro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 25. Degli angoli compoſti A F della diviſata natura ſia l' interno angolo BAD del primo ineguale coll' omologo interno GFI del ſecondo; ſaranno gli eſterni aderenti angoli BAC CAD al primo interno ſoprappoſti eguali relativamente agli eſterni aderenti angoli GFH HFI ſoprappoſti al ſecondo (§ 362) e perciò ſarà l' inclinazione dei primi eſterni ineguale coll' omologa (§ 356) inclinazione dei ſecondi (§ 375); ma nella ſteſſa maniera ſi moſtra la ſteſſa inclinazione di quei piani del primo angolo ineguale

con

con ogni altra (ſe ci fuſſe (§ 357) omologa inclinazione de' piani del ſecondo; e ſono ineguali quegli angoli Solidi, nei quali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ſi trovi una inclinazione nei piani di uno ineguale con tutte le omologhe inclinazioni de' piani dell' altro (§ 358); ſaran dunque ineguali quegli angoli compoſti, nei quali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali ſia un angolo interno di uno ineguale &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 381. Che ci ſiano degli angoli compoſti della diviſata natura lo moſtreranno a ſuo luogo i Solidi Innominati.

AVVERTIMENTO II.

§. 382. Due piani inclinatamente aderenti ſi diranno accoppiarſi con altri due anche inclinatamente aderenti, ſe ſe ne facciano combaciar due piani, e le comun' interſezioni di eſſi.

COROLLARIO I.

§. 383. I quattro piani così accoppiati si riducono a trè, de' quali il medio, quello cioè, che rappresenta i due combaciati, si dirà interno, e gli estremi, si diranno esterni.

COROLLARIO II.

§. 384. In ogni sì fatto accoppiamento di piani avran luogo due inclinazioni, quelle cioè, che ànno i piani esterni coll'interno.

LEMMA.

§. 385. *Se le due inclinazioni di uno accoppiamento di piani siano relativamente eguali alle due inclinazioni di altro accoppiamento, saranno tra se i piani esterni del primo accoppiamento egualmente inclinati, che i piani esterni dell'altro.*

DIMOSTRAZIONE.

I piani ABC ABD ABE rappreſenti- Fig. 26
no il primo accoppiamento, e rappreſenti AB le combaciate comun' interſezioni; ed i piani FGH FGI FGK rappreſentino il ſecondo, ed FG le altre combaciate interſezioni; e ſia l' inclinazione di ABC ABD eguale all' inclinazione di FGH FGI; e quella di ABD ABE eguale a quella di FGI FGK; ſi prendano nelle comun' interſezioni ad arbitrio i punti B G, e da queſti s'inalzino tante perpendiculari ne' riſpettivi piani BC BD BE GH GI GK.

Per la coſtruzione gli angoli CBE HGK miſurano le inclinazioni de' piani eſterni, e gli angoli DBC DBE IGH IGK le inclinazioni, che ànno gli eſterni col riſpettivo interno; ſarà dunque per l' ipoteſi la ſomma de' primi due eguale alla ſomma de' ſecondi; ma eſſendoſi nella coſtruzione le rette BC BD BE erette perpendiculari dallo ſteſſo punto B alla ſteſſa AB; e le rette GH GI GK perpendiculari dallo ſteſſo punto G

alla

alla ſteſſa FG, ſono BC BD BE nello ſteſſo piano, ed in altro iſteſſo piano le rette GH GI GK; e perciò l' angolo CBE eguaglia i due DBC DBE e l' angolo HGK gli altri due IGH IGK; dunque l' angolo CBE eguaglia l' angolo HGK. C. D. D.

PROPOSIZIONE IV.

§. 386. *Gli angoli compoſti da ſoli quattro angoli piani relativamente eguali ſono eguali, ſe un angolo interno di uno eguagli un intern' omologo dell' altro.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig.25. Gli angoli A F ſiano della diſegnata natura, e ſiano gli angoli BAD GFI i di loro interni omologhi eguali; ſarà dacciò l'angolo ſolido ABCD eguale all' angolo FGHI, e l'angolo ABED eguale all' angolo FGKI (§ 371), e ſaran perciò relativamente eguali le omologhe inclinazioni de' piani e della prima coppia, e della ſeconda; ſaranno dunque negl' interi angoli A F non ſolo le omologhe

loghe inclinazioni de' piani ſoprappoſti agli eguali omologh' interni BAD CFI (§ 371) eguali, ma anche le altre, come di eſterni piani di tali accoppiamenti (§ pr); ma ſon anche queſti angoli A F per l' ipoteſi terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; ſon dunque eguali. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 387. Così del pari ſi moſtra, che gli angoli A G (*fig.* 23) compoſti da cinque angoli relativamente eguali ſiano eguali, ſe i due interni CAF, DAF del primo ſiano relativamente eguali ai due omologh' interni IGM KGM del ſecondo; perchè reſtando così gl' interi angoli A G diviſi dai piani di quegli angol' interni in angoli ſemplici relativamente eguali, ſi moſtrano in eſſi, come nella prec. eguali tutte le altre omologhe inclinazioni dei piani; ſicchè potrà dirſi generalmente, che ſiano eguali gli angoli compoſti, ſe ſian diviſibili in egual numero di angoli ſemplici relativamente eguali; e perciò, ſe oltre d' eſſer com-

preſi

preſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, abbiano un angolo interno eguale ad un interno omologo, ſe ſian compreſi da ſoli quattro angoli piani, due, ſe ſian compreſi da cinque; tre, ſe da ſei, e così in appreſſo.

AVVERTIMENTO II.

§. 388. Di due rettilinei, che poſſono combaciar con uno aſpetto, e non con l' altro, ſi diranno i primi aſpetti corriſpondenti, e non corriſpondent' i ſecondi.

LEMMA.

§. 389. *I triangoli relativamente equilateri, ma non aſſolutamente ànno gli aſpetti non corriſpondenti, ed ànno gli altri corriſpondenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 27. I. Siano i triangoli ABC DEF relativamente equilateri, e non aſſolutamente, e ſia perciò AC = DF, AB = FE, e BC = ED; ſarà l' angolo A eguale all'

all' angolo F, B = E, e C = D; ma ciascuno di questi triangoli, per l' ipotesi non è assolutamente equilatere; non sarà perciò neppur assolutamente equiangolo; sia dunque nel triangolo ABC l' angolo A maggiore dell' angolo C, sarà dello stesso maggiore anche l' angolo F a quello eguale; se dunque si sopprapponga il triangolo DEF sul triangolo ABC in modo, che vada D sopra A il lato DF su l' eguale AC, caderà F sopra C; ma essendo l'angolo F maggiore dell' angolo C, caderà FE fuori del triangolo ABC; i triangoli dunque relativamente equilateri, ma non assolutamente ànno gli aspetti non corrispondenti.

II. Se però uno di sì fatti triangoli si rivolga, cosicchè si faccia incontrar l'altro con l' altro suo aspetto, allora incontrandosi non solo un lato, ma anche gli angoli eguali combaceranno; e perciò &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 390. Gli ſteſſi doppj aſpetti corriſpondenti, e non corriſpondenti ſi oſſervano in tutt' i rettilinei relativamente equilateri, ed equiangoli, ma non aſſolutamente; giacchè anche in ognuno di queſti ſi moſtra, che l' ineguaglianza degli angoli ſegua quella de' lati.

COROLLARIO.

§. 391. Di tutt' i rettilinei aſſolutamente, e relativamente equilateri, ed equiangoli ſono gli aſpetti tutti corriſpondenti.

PROPOSIZIONE V.

§. 392. *Ci ſon degli angoli ſolidi eguali, che non poſſono combaciare.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 7. Due triangoli relativamente equilateri, e non aſſolutamente eſibiſcano gli aſpetti ABC DEF non corriſpondenti,

e ſia

e ſia AC = DF, AB = FE, e BC = ED.

Eſſendo sì fatti triangoli relativamente equilateri, ſaran ſimili, ed eguali, e ſaran perciò iſcrittibili in cerchj eguali; trovati dunque i centri di sì fatti cerchj G H, ed erette da eſſi l'eguali GI HK normali ai riſpettivi piani di eſſi, ed unito il punto I con i punti ABC, e 'l punto K con i punti DEF; ſi avranno ſei lati eguali AI BI CI DK EK FK, giacchè il quadrato d'ognuno di eſſi eguaglia i quadrati di una dell' eguali normali, e di uno degli eguali ragi; ſarà dunque il triangolo AIC ſimil' ed eguale al triangolo DKF, ed avran queſti eguali gli angoli in IK; ſarà il triangolo AIB ſimil' ed eguale al triangolo EKF, ed avran queſti eguali gli angol' in IK; e ſarà finalmente il triangolo BIC ſimil' ed eguale al triangolo EKD, ed avran queſti eguali gli angol' in IK; ſi avranno dunque in IK due angoli ſemplici compreſi da angoli piani relativamente eguali, e perciò eguali (§ 371).

Si ſupponga ſoprapporſi l' angolo K

ſu

ſu l' angolo I in modo, che vada K ſopra I il lato KD ſopra IA e 'l piano KDF ſul piano IAC, caderà anche KF ſopra IC per l'eguaglianza di quegli angoli, ed i punti D F caderanno ſopra i punti A C per l' eguaglianza de' lati; Or ſe ſi dica, che anche nel reſto combacino quegli angoli ſolidi K I, e che perciò anche KE vada ſopra IB, caderebbe per l' eguaglianza de' lati E ſopra B, e così combacerebbe il triangolo DEF col triangolo ABC; ma queſto è contro l' ipoteſi; è falſo dunque, che quei ſemplici, ed eguali angoli I K poſſino combaciare; e ſarà perciò vero ciocchè D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 393. Siccome dall' incorriſpondenza de' triangoli s' è moſtrata l' incombaciabilità degli angoli ſemplici eguali ſu di eſſi nella diſegnata forma edificati, così dall' incorriſpondenza di qualunque altra coppia di rettilinei relativamente equilateri, ed equiangoli, ma non aſſolutamente (§ 390) ſi moſtra l' incomba-

baciabilità degli eguali angoli compoſti ſu di eſſi nella ſteſſa forma coſtrutti, giacchè queſti dall' aver ſimili, ed eguali rettilinei ad eſſi ſottopoſti ſi troveranno non ſolo, come quelli, compreſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ma tali bensì, che abbiano gl' interni omologhi angoli eguali, come può facilmente oſſervarſi (§ 379).

AVVERTIMENTO II.

§. 394. Lo ſteſſo però doppio aſpetto corriſpondente, e non corriſpondente oſſervato ne' piani relativamente, e non aſſolutamente equilateri, ed equiangoli (§ 390), à luogo negli angoli ſolidi ſu di eſſi nella diſegnata forma coſtrutti; ſe cioè uno di eſſi ſi ſupponga rivolgerſi in modo, che occulti gli eſterni aſpetti de' ſuoi piani, manifeſti gl' interni, ſi troverà, che debba coll' altro combaciare; giacchè l' incombaciabilità de' diſegnati angoli à luogo, non perchè le interne inclinazioni di uno ſian diſſimili dalle omologhe inclinazioni dell' altro, che già ſonoſi oſſervate eguali; ma perchè

chè ſon queſte in uno diſpoſte in ordine inverſo a quello, che ſon diſpoſte nell' altro; ecco perchè non oſtante l' incombaciabilità ſiano eguali; ecco perchè invertendoſene uno debbano anche combaciare.

AVVERTIMENTO III.

§. 395. Dallo ſteſſo tenore della precedente dimoſtrazione ſi oſſerva, che la ſteſſa incombaciabilità, e doppio aſpetto oſſervato ne' diſegnati angoli ſolidi, abbia luogo in quei ſolidi ſteſſi ſimili, ed eguali, che ſono edificati ſu gli aſpetti incorriſpondenti di piani ſimili, ed eguali; nè per queſto può dubitarſi dell' eguaglianza di ſolidi sì fatti, come quelli, ne' quali, a ſomiglianza di quegli angoli, conviene l' eguaglianza delle tre dimenſioni fattrici della ſolidità; trovandoſi cioè in quei ſolidi eguali le baſi, e le altezze.

AVVERTIMENTO IV.

§. 396. Siccome ſi oſſervò (§ 391) ne' piani, che quelli, che ſiano aſſolu-

ta-

tamente, e relativamente equilateri, ed equiangoli, avendo ſempre gli angoli ſimilmente diſpoſti, perchè tutti eguali, abbiano tutti gli aſpetti corriſpondenti: così ora ſi oſſerva, che negli eguali angoli ſolidi, de' quali ſiano aſſolutamente, e relativamente eguali non ſolo gli eſterni angoli, ma anche le inclinazioni de' pianì di eſſi, o ſiano gl' interni angoli de' medeſimi (§ 376), ſiano parimente gli aſpetti tutti corriſpondenti, cioè ſempre combaciabili.

AVVERTIMENTO V.

§. 397. Si ſon veduti degli eguali angoli ſolidi incombaciabili, i Solidi Innominati ce ne moſtreranno degli altri ineguali, quantunque terminati da egual numero di angoli piani relativamente eguali; e ſebbene angoli sì fatti ſi rinvengano in ſolidi diſſimili, e la natura de' ſolidi ſimili ci perſuada, che tali angol' in eſſi non poſſano aver luogo; pure per procedere, come in queſta ſcienza ſi deve, converrà in queſti a ſeconda della premeſſa teoria dimoſtrarlo, e

queſto premetterlo a Solid' Innominati, che àn di tanto biſogno, per ciocchè riguarda i Solidi Regolari, dai quali provvengono.

LEMMA.

§. 398. *Negli angoli Solidi Ottaedrali ſon gli angol' interni di quadrato; negl' Icoſaedrici di pentagono regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

Figure ſolide. I, e II. Eſſendo gli angoli d'ogni interno rettilineo di un Solido negli angoli ſteſſi del Solido; e negli Ottaedri, ed Icoſaedri, reſtando in quelli compreſi dai lati ſteſſi del ſolido, ma non da quelli, che appartengono allo ſteſſo angolo degli eſterni piani di eſſi (§ 23); ſaranno negli Ottaedri, ed Icoſaedri gli angoli degl' interni di lor rettilinei gli angol' interni de' ſolidi angoli di eſſi (§ 360); ma ſon quadrati gl' interni rettilinei dell' Ottaedro (§ 86) pentagoni quelli dell' Icoſaedro (§ 267); ſon dunque negli angoli ſolidi Ottaedrali gli angol' interni di quadrato; negl' Icoſaedrici di pentagono Regolare. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 399. Può anche lo ſteſſo moſtrarſi per la prima parte dal naſcer l'Ottaedro dall' interſegarſi i ſuoi quadrati per le diagonali (§ 73), e per la ſeconda dal comprender nell' Icoſaedro i lati de' ſuoi triangoli aderenti angoli di pentagoni regolari (§ 271).

PROPOSIZIONE V.

§. 400. *Gli angoli ſolidi in ogni ſpecie di Solidi Regolari ſon tutti aſſolutamente, e relativamente eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. Delle Piramidi, de' Cubi, de' Dodecaedri ſon tutti i ſolidi angoli ſemplici, e terminati in ciaſcuna ſpecie di eſſi da angoli non ſolo relativamente, ma anche aſſolutamente eguali; ſon dunque nelle Piramidi, ne' Cubi, ne' Dodecaedri gli angoli ſolidi aſſolutamente, e relativamente eguali;

ma i ſolidi angoli degli Ottaedri ſon tutti compreſi da quattro angoli di triangoli equilateri, e retti ſono gl' interni angoli di eſſi (§ pr); i ſolidi angoli degl' Icoſaedri ſon tutti compreſi da cinque angoli di triangoli equilateri, e di pentagoni regolari ſon gl' interni angoli di eſſi; ſon dunque anche degli Ottaedri, ed Icoſaedri gli angoli ſolidi aſſolutamente, e relativamenre eguali (§ 379); e perciò &c. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 401. Ne' Solidi Regolari della ſteſſa ſpecie, ſiccome ſono regolari ſimili, ed eguali gli eſterni, ed interni piani, così ſono regolari, ed eguali gli eſterni, ed interni angoli de' ſolidi angoli di eſſi; dal che ſegue di vantaggio 1.°, che ſiccome gli eguali angoli ſolidi compreſi da angoli ſol relativamente eguali poſſono combaciare in una ſola poſizione, ſolo cioè, facendo corriſpondere i piani di uno agli eguali piani dell' altro; ed i compreſi da angoli piani, anche aſſolutamente eguali, ma che abbiano angoli

li interni ſol relativamente eguali, quali ſi vedran taluni angoli de' Solidi Innominati, poſſono combaciare per due poſizioni; così gli angoli ſolidi d' ogni ſpecie di Solidi Regolari combacino per tutte le poſſibili poſizioni, cioè qualunque piano dell' uno ſia ſoprappoſto a qualunque piano dell' altro; 2.° che ſiano i piani in ogni ſpecie de' Solidi Regolari aſſolutamente, e relativamente egualmente inclinati ne' piani aderenti, giacchè i piani, che combaciano ſono egualmente inclinati. Nel che vedeſi in ogni ſpecie de' Solidi Regolari compita l' uniformità coſtitutiva della Regolarità.

AVVERTIMENTO I.

§. 402. Baſta per l' eguaglianza di due angoli ſolidi, che ſian compreſi da egual numero di angoli piani, relativamente eguali, e che ſiano relativamente eguali le omologhe inclinazioni dei piani (§ 354); ma queſto non baſta punto per la Uniformità de' medeſimi; vuol queſta di vantaggio, che ne ſiano gli angoli piani, e le inclinazioni di eſſi,

anche affolutamente eguali; Dal che effendofi l'uno, e l'altro rinvenuto negli angoli de' Solidi Regolari di ogni ſpecie, potrà dirſi, che ſian queſti non ſolo aſſolutamente, e relativamente eguali, ma affolutamente, e relativamente uniformi. Negli angoli Solidi dunque l'eguaglianza efige l'uniformità relativa di tutto ciò, che concorre a coſtituire la quantità de' medeſimi (§ 354); la Regolarità l'aſſoluta.

AVVERTIMENTO II.

§. 403. Ne' Solidi Simili ſi diranno omologhi quegli angoli ſolidi, che ſon compreſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali.

COROLLARIO.

§. 404. Nelle piramidi Simili non triangolari i compoſti angoli verticali ſono omologhi.

PROPOSIZIONE VII.

§. 405. *Nelle piramidi ſimili ſono eguali gli angoli omologhi.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Nelle ſimili piramidi triangolari ſono gli angoli omologhi non ſolo compreſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali (§ 403), ma ſemplici, e perciò eguali (§ 371).

Nelle altre piramidi tutte ſono gli angoli ſolidi nelle baſi egualmente ſemplici, e perciò ne ſon gli omologhi eguali (§ 371); ed eſſendo queſti eguali, eguali ſon parimente le omologhe inclinazioni dei piani di eſſi (§ 354); e perciò le omologhe inclinazioni de' piani, che comprendono i riſpettivi angoli verticali; ma queſti, come omologhi (§ pr) ſon anche compreſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali; ſon dunque anche queſti eguali, e perciò nelle piramidi ſimili ſono eguali gli angoli omologhi. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 406. Dallo ſteſſo tenore della prec. prop. appariſce 1.° che ſiano eguali due an-

angoli compoſti, compreſi da egual numero di angoli piani relativamente eguali, ſe ſian tali, che ne ſiano i ſottopoſti rettilinei piani ſimili, e queſti compian con eſſi due piramidi ſimili. 2.° Che ſiano eguali gli angoli omologhi de' Priſmi, e Parallelepipedi ſimili, perchè tutti ſemplici.

AVVERTIMENTO.

§.407. Per gli altri Solidi Simili fuori di queſte Claſſi, ove abbiano omologhi angoli compoſti, l' eguaglianza di queſti può ripeterſi, o dal veder ſimili gl' interni rettilinei ad eſſi ſottopoſti, o dal vedere, che i piani convenuti in quegli angoli abbiano altrove terminati angoli omologhi ſemplici, e perciò eguali, e così eguali anche conoſcere le inclinazioni de' piani di quegli omologhi compoſti; onde può generalmente dirſi, che de' Solidi ſimili ſiano eguali gli angoli omologhi.

PARTE SECONDA.

De' Solidi Innominati.

DEFINIZIONE I.

§. 408. SE si accoppj una Piramide Regolare con un' altra di lato eguale, in modo, che ne combacino due piani, si avrà il Solido Primo Innominato.

COROLLARIO I.

§. 409. L' Innominato Primo è compreso da sei eguali triangoli equilateri (giacchè gli altri due restano nell'interno del solido combaciati) così combinati, che cospirino alla formazione di cinque angoli solidi, due piramidali superstiti, gli opposti cioè ai combaciati piani, che saranno anche detti opposti, e tre che nascono dall' accoppiamento degli angoli de' combaciati piani, che saran detti nuovi; ed è ciascuno de' primi compreso da tre angoli di quei triangoli, ciascun de' secondi da quattro.

CO-

COROLLARIO II.

§. 410. In ogni angolo nuovo dell'Innominato Primo vi è un angolo interno, quello cioè de' combaciati piani, di triangolo equilatere.

DEFINIZIONE II.

§. 411. Se si accoppjno nella stessa forma due di quelle piramidi pentagone, che tagliano dall' Icosaedro i suoi pentagoni, facendone combaciar gli eguali pentagoni, si avrà il Solido Innominato Secondo.

COROLLARIO I.

§. 412. L'Innominato Secondo è compreso da dieci eguali triangoli equilateri, così combinati, che cospirino alla formazione di sette angoli solidi, due Icosaedrici superstiti, gli opposti cioè alle combaciate basi; onde saran anche detti opposti, e cinque, che nascono dall' accoppiamento degli angoli, che sono nelle combaciate basi, onde saran detti nuovi;

vi; ed è ciascuno de' primi compreso da cinque angoli di quei triangoli, ciascun de' secondi da quattro.

COROLLARIO II.

§. 413. In ogni angolo nuovo dell'Innominato secondo vi è un angolo interno, quello cioè delle combaciate basi, di pentagono regolare.

COROLLARIO III.

§. 414. I Solid'Innominati sono equilateri, perchè sol terminati da eguali triangoli equilateri.

AVVERTIMENTO.

§. 415. Quantunque non sempre l'accoppiamento di due piani simili, ed eguali di due solidi produca degli angoli solidi insorti dagli angoli alle basi dell'uno, e l'altro solido; giacchè ove si sopraponga un prisma, o una piramide troncata sul suo resto, invece di nascere gli angoli nuovi, si elidono gli uni gli altri

altri i vecchj; pure non può dubitarsi, che dal disegnato accoppiamento di solidi nascano, come si son dettagliati, gli angoli nuovi; imperciocchè e nelle prime, e nelle seconde piramidi sono i piani egualmente inclinati alle basi, giacchè le prime son regolari, e sono i piani di queste assolutamente, e relativamente egualmente inclinati (§ 401), e le seconde, essendo simili, ed eguali, ed avendo gli angoli verticali Icosaedrici, debbono, soprapposti questi angoli, combaciare qualunque piano verticale dell'una sia sopprappoſto a qualunque piano verticale dell' altra (§ 401), ed i piani, che combaciano son egualmente inclinati; sicchè o ciascun piano insistente alla base dell' una deve incontrarsi in diretto con ciascun piano alla base dell'altra, o deve ciascun incontrar l'altro con eguale inclinazione; ma non può il primo asserirsi, dandosi così delle piramidi, che abbiano i piani tutti alle basi normali; e così dandosi dallo stesso punto calate in un piano più normali, i lati cioè di quelle piramidi, come intersezioni di quei piani normali; converrà dunque confessare il secondo,

ed

ed ammettere gl' inſorti angoli nuovi.

DEFINIZIONE III.

§. 416. Si diranno aſſi de' Solid' Innominati le rette, che uniſcono in eſſi gli angoli oppoſti.

LEMMA.

§. 417. *Gli eſtremi de' lati convenuti in ogni angolo nuovo del Primo Innominato non ſono nello ſteſſo piano.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè le rette, che l'uniſcono com- Fig. fol.
prendono due de' ſuoi inclinati (§ 415) triangoli. C. D. D.

LEMMA II.

§. 418. *Se dalla retta, che incontra normalmente un piano ſi faccia oltrepaſſarlo, queſta reſterà all' altro aſpetto del piano anche allo ſteſſo normale.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Fig.28. Giacchè gli angoli, che fa la ſua produzione BC nelle rette DE FG ſono egualmente retti, che quelli, che fa nelle ſteſſe la normale AB; perchè a quelli verticalmente oppoſti. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 419. Se dunque dallo ſteſſo punto di un piano ſi eriggano due normali una verſo l'aſpetto ſuperiore, l'altra verſo l'inferiore dello ſteſſo, queſte ſaranno in diretto.

LEMMA III.

§. 420. *Se ſi facciano combaciar due ſimili, ed eguali rettilinei regolari, combaceranno anche i centri di eſſi.*

DIMOSTRAZIONE.

Altrimente dallo ſteſſo punto medio de' combaciati lati potrebbero a quel lato inalzarſi due perpendiculari, come ſa-

sarebbero le rette, che l'unirebbero con i distinti centri (§ 11). C. D. D.

LEMMA IV.

§. 421. *L' asse de' Solid' Innominati passa pel centro delle combaciate basi, e resta dallo stesso diviso* bifariam.

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè le rette, che uniscono gli angoli opposti con i combaciati centri (§ pr), dovendo restare allo stesso piano normali (§ 34 e 276) sono in diretto (§ 419), e sono eguali (§ 34 e 268). C. D. D. Fig.sol.

LEMMA V.

§. 422. *Nell' Innominato Secondo i lati opposti agli angoli convenuti nello stesso suo angolo nuovo comprendono due angoli opposti di pentagono regolare, e la retta, che unisce gli altri due è la corda dell' uno, e l'altro pentagono.* Fig.sol. 1 Fig.8.

DIMOSTRAZIONE.

Comprendendo de' triangoli aderenti Icosaedrici tanto i lati AB BD, quanto i lati AC CD angoli di pentagoni regolari (§ 271) sarà vera la prima, e la seconda parte. C. D. D.

LEMMA VI.

§. 423. *Nel pentagono regolare il centro è fuori delle sue corde.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 11. Giacchè la corda KG, ed ogni altra è inclinata al lato GH, ed ad ogni altro corrispondente, ed il centro trovasi in KO allo stesso perpendiculare (§ 11). C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 424. I piani degli angoli pentagonali, che son sottoposti ad ogni angolo nuovo del Secondo Innominato non sono in diretto, ma s'intersegano nella corda

co-

comune, giacchè resta fuori di questa (§ pr) l'asse, che à in quei piani medesim'i suoi estremi.

COROLLARIO II.

§. 425. E perciò gli estremi de' lati convenuti in ogni angolo nuovo dell'Innominato secondo non sono nel medesimo piano.

PROPOSIZIONE VIII.

§. 426. *I Solidi Innominati non sono iscrittibili nella Sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo questi equilateri (§ 414); se fussier anche nella Sfera iscrittibili avrebbero nello stesso piano gli estremi de'lati convenuti in ogni angolo (§ 83); ma non l'anno. (§§ 417 e pr); non son dunque nella Sfera iscrittibili. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 427. *Gli angoli nuovi de' Solidi Primi innominati ſon tutti aſsolutamente, e relativament' eguali, e così ſono tra ſe anche gli angoli nuovi de' Solidi Secondi.*

DIMOSTRAZIONE.

Ogni angolo nuovo dei Primi è compreſo da quattro angoli di triangoli equilateri (§ 409), ed à un angolo interno anche di triangolo equilatere (§ 410); ed ogni angolo nuovo de' Secondi è compreſo da quattro angoli di triangoli equilateri (§ 412), ed à un angolo interno di pentagono regolare (§ 413); ſarà dunque vera la prima, e la ſeconda parte pel (§ 386). C. D. D.

PROPOSIZIONE X.

§. 428. *Ci ſon degli angoli ſolid' ineguali, quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

A B C

Disegni A un angolo nuovo dell'Innominato Primo, B un angolo nuovo dell' Innominato Secondo C, un angolo solido Ottaedrale.

L'angolo A è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à un angolo interno anche di triangolo equilatere (§ 410), l'angolo B è compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à un angolo interno di pentagono regolare (§ 413), l'angolo C finalmente è del pari compreso da quattro angoli di triangoli equilateri, ed à entrambi gl'interni retti (§ 398); ma son ineguali quegli angoli Solidi, ne' quali, quantunque compresi da egual numero di angoli piani relativament' eguali, sia un angolo interno in uno ineguale cogl' interni omologhi dell'altro (§ 380); dunque nè l'angolo A, nè l'angolo B eguaglia l'angolo C; e perciò ci son degli angoli Solid' ineguali, quantunque com-

presi da egual numero di angoli piani relativamente eguali. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 429. Dall'aver conoscinto nell'angolo A un angolo interno di triangolo equilatere, e nell'angolo B un interno di pentagono regolare non segue sicuramente, che sian gli angoli A B ineguali; giacchè essendo questi equiangoli, ed essendo così ogn'interno dell'angolo A omologo con ciascun interno dell'angolo B (§ 363), deve l'interno di A sconvenire con tutti gl'interni di B, per esser ineguali; questo si dimostrerà nella seguente proposizione, per conoscere anche più estesamente la già dimostrata verità.

LEMMA.

Fig. 29. §. 430. *Il lato del Pentagono Regolare è minor del doppio di quello del Decagono Regolare iscrittibile allo stesso cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

L'arco CND tagliato dal lato CD dell'iſcritto pentagono regolare ſi divida *bifariam* in N, e ſi uniſchi CN DN.

Eſſendoſi nella coſtruzione l'arco CND diviſo *bifariam* in N; ſaranno i lati CN DN non ſolo eguali, ma lati del Decagono iſcrittibile allo ſteſſo cerchio; ma nel triangolo CND il lato CD è minor de' due CN DN; dunque il lato del pentagono è minor del doppio del lato del Decagono nello ſteſſo cerchio iſcrittibile. C. D. D.

PROPOSIZIONE XI.

§. 431. *L'angolo nuovo del Solido Primo, e l'angolo nuovo del Solido Secondo ſono ineguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Se fuſſero eguali ſarebbe l'interno ignoto del Primo di pentagono Regolare, e l'interno ignoto del Secondo di triango- Figure ſolide.

lo equilatere (§ 376); e così sarebbe nel Solido Secondo l'asse eguale al suo lato; e sarebbe perciò in esso il quadrato del lato eguale ai quadrati uno fatto dal suo semiasse (§ 421); e perciò dal suo semilato, e l'altro dal ragio di circoscrizione del pentagono delle combaciate sue basi (§ 9); ma questo è lo stesso, che il quadrato del lato dell'esagono nello stesso cerchio iscrittibile, che quel pentagono; sarebbe dunque il quadrato del lato di questo Solido, e perciò il quadrato del lato del suo pentagono (§ 414) eguale ai quadrati fatti uno dal semilato, l'altro dal lato dell'esagono nello stesso cerchio iscrittibile; ma il quadrato del lato del pentagono eguaglia quelli dell'esagono, e del Decagono nello stesso cerchio iscrittibili; sarebbe dunque il semilato del pentagono regolare lo stesso, che il lato del Decagono regolare nello stesso cerchio iscrittibile; ma questo ripugna (§ pr.); è falso dunque, che l'interno ignoto del Solido Secondo sia di triangolo equilatere; e perciò l'interno di triangolo equilatere del Primo sconviene con ciascun interno del Secondo

do (§ 413); ſon dunque ineguali (§ 380). C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 432. Se dallo ſteſſo tenore della precedente dimoſtrazione s'è veduto, che il ſemiaſſe del Solido Secondo eguagli il lato del Decagono nello ſteſſo cerchio iſcrittibile, che il ſuo pentagono, e s'è il lato del Pentagono minor del doppio di quello del Decagono nello ſteſſo cerchio iſcrittibile, ſarà in queſto Solido l'aſſe maggior del lato; e perciò ſarà l'ignoto interno angolo de' ſuoi angoli nuovi maggiore dell'angolo di triangolo equilatere.

COROLLARIO II.

§. 433. Dagli angoli dunque di triangoli equilateri poſſon comprenderſi non ſolo l'angolo Piramidale, l'Ottaedrale, l'Icoſaedrico, ma anche gli angoli nuovi de' Solid' Innominati.

COROLLARIO III.

§. 434. Se gli ſteſſi quattro angoli di triangoli equilateri, aderendo in modo da reſtar tutt' i piani tra ſe egualmente inclinati (§ 401), e così da comprendere interni angoli eguali (§ 376), e queſti retti (§ 398) comprendono l'angolo Ottaedrale; ed aderendo in modo da comprendere un interno di triangolo equilatere, o di pentagono regolare comprendono l' angolo Nuovo del Primo, o del Secondo Innominato; è chiaro, che poſſano i lati di un angolo compoſto alterare le interne inclinazioni, ſenz' alterare le eſterne; ed è perciò manifeſto, il perchè nella miſura degli angoli Solidi debb' averſi ragione non ſolo dell'eſterne, ma anche dell'interne di loro inclinazioni.

AVVERTIMENTO I.

§. 435. Dal che niente oſta a credere, che poſſano gli ſteſſi quattro angoli veduti comprendere l'angolo Ottaedrale, ed i Nuovi, comprendere anche altre ignote

ſpecie

ſpecie di angoli Solidi, alterando cioè, gl' interni loro angoli, e non gli eſterni diverſamente da quello, che nel formare i noti Nuovi ſi ſono alterati. Lo ſteſſo va detto, e con maggiore variabilità nella combinazione de' cinque angoli, che comprendono l' angolo Icoſaedrico.

COROLLARIO IV.

§. 436. Ove dunque doveſſe venirſi in cognizione del numero de' Solidi Regolari ſolo da quello de' diverſi angoli ſolidi, che poſſan comprenderſi dagli angoli di ſimili rettilinei regolari, ſi trovarebbe molto maggior di quello, che realmente lo è.

AVVERTIMENTO II.

§. 437. Vediamo per qual altra ſtrada poſſiamo di queſta verità aſſicurarci. Tutte le altre note, ed ignote ſpecie di angoli Solidi, che poſſon naſcere da quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri, oltre i noti angoli Ottaedrali, ed Icoſaedrici, debbono ammettere angol' interni

non

non uniformi; eſſendo queſto neceſſario, per alterarſi le interne, e non le eſterne inclinazioni di quegli angoli dalla uniformità, nella quale debbono eſſere ne' Solidi Regolari; e così di fatto ſi oſſerva negli angoli nuovi de' Solid' Innominati; ſe dunque la Regolarità eſclude la difformità, eſclude queſti altri angoli tutti; ſiccome cioè, quantunque ſian moltiſſime le diverſe ſpecie de' rettilinei, che poſſon terminarſi dalle ſteſſe quattro, o cinque rett' eguali, alterando cioè, variamente i di loro angoli; e pure non ſon più di due i rettilinei regolari, che poſſon da quelle comprenderſi, il quadrato cioè, e 'l pentagono regolare; così quantunque ſian forſe anche moltiſſime le diverſe ſpecie di angoli Solidi, che poſſan comprenderſi da quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri, non ſon per tanto più di due i regolari, e perciò uniformi angoli Solidi, che poſſon da quelli terminarſi, l'Ottaedrale cioè, l'Icoſaedrico; ſarà dunque tanto ſicuro, che non ſian più di cinque i poliedri Regolari, quanto lo è, che ſia dalla Regolarità inſeparabile l'Uniformità. Ma dall'

addotta definizione del Solido Regolare non reſtano punto eſcluſi queſti altri angoli tutti ? Queſti angoli non poſſono eſiſtere, che in Solidi gli angoli de'quali ſian terminati da ineguál numero di angoli piani, come ſi vedono i Solid' Innominati ; ſon dunque anche dalla definizione eſcluſi.

AVVERTIMENTO III.

§. 438. Siccome ſi vidde, che la norma, che nella ſtima della quantità di due angoli Solidi può deſumerſi dalla combaciabilità ſia meno eſteſa del biſogno (§ 392) ; così ora s'è veduto, che lo ſia più del dovere quella, che può dedurſi dagli angoli, onde ſon terminati ; è ſtato dunque giuſto il ricorrerne ad altra, e dovrà queſta crederſi all' uopo proporzionata, s'è ſtata da tanto da ſcovrire il difetto di quella, e l'eccesſo di queſta.

CAPO

CAPO IX.

De' Solidi di Seconda Operazione.

§. 439. PEr far, che le date notizie de' Solidi Regolari poteſſero rapportarſi alle più importanti nozioni della Sfera è ſtato neceſſario, a Solidi Regolari aggiunger queſti, che ſaran detti di Seconda Operazione.

DEFINIZIONE I.

§. 440. Se dall'Ottaedro, dal Cubo, dal Dodecaedro, dall'Icoſaedro ſi taglino gli angoli Solidi con quei piani, che vedrem nat' in eſſi, unendo i punti medii di tutt' i lati contigui convenuti in ognun di quegli angoli, naſcon quei Solidi, che ſaran detti di Seconda Operazione; riputandoſi, come prima, quella produce in eſſi gli altri Solidi dalle corde.

AVVERTIMENTO I.

§. 441. Questa stessa operazione può bene aver luogo anche nella Piramide; ma poichè produce in essa un Solido del tutto Regolare, qual è l'Ottaedro (§ 59); non dovea perciò questo numerarsi tra Solidi di seconda Operazione, nè la Piramide tra genitori di essi.

AVVERTIMENTO II.

§. 442. Il Solido Regolare in rapporto del Solido, che nasce in esso dalla disegnata operazione, sarà detto Solido corrispondente.

COROLLARIO I.

§. 443. Nascon sì fatti Solidi in quei Solidi Regolari, che àn lati opposti, giacchè la Sola Piramide, che non l'à, non vien numerata tra genitori di essi.

CO-

COROLLARIO II.

§.444. Lati di sì fatti Solidi saran le rette, che unisconо due punti medii de' lati appartenenti allo stess' angolo piano del Solido Corrispondente; restando del tutto astratti da ciascuno di essi i lati del Solido corrispondente.

COROLLARIO III.

§. 445. E poichè in ogni Solido Regolare eguali sono i lati, e perciò anche i semilati, eguali gli angoli piani, eguali perciò saranno i lati d' ogni Solido di Seconda Operazione; e perciò saranno tali Solidi equilateri.

COROLLARIO IV.

§. 446. Tagliandosi con tale operazione gli angoli Solidi dal Solido Regolare; resteranno nel Solido, che nasce in esso, tanti nuovi piani, che vedrem nati sotto gli angoli, tanti residui de' piani del Solido corrispondente; sarà perciò il numero

mero de' piani d'ogni Solido di Seconda Operazione eguale alla ſumma degli angoli ſolidi, e de' piani del Solido corriſpondente; quindi quattordici piani avrà il Solido, che naſce nell'Ottaedro, o nel Cubo; trentadue quello, che naſce nel Dodecaedro, od Icoſaedro.

COROLLARIO V.

§.447. E poichè di sì nati piani convengono gli angoli ne' punti medii de' lati del Solido corriſpondente; quindi ciaſcun Solido di Seconda Operazione avrà tanti angoli ſolidi, quanti lati à il Solido corriſpondente; e perciò il Solido, che naſce nell' Ottaedro, o nel Cubo ne avrà dodici; e trenta quello, che naſce nel Dodecaedro, od Icoſaedro.

DEFINIZIONE II.

§. 448. Angoli oppoſti in sì fatti Solidi ſi diran quelli, che pogiano i vertici ne' punti medii de' lati oppoſti del Solido corriſpondente.

DEFINIZIONE III.

§. 449. Aſſi le rette, che l'uniſcono.

COROLLARIO I.

§. 450. Gli aſſi dunque di sì fatti ſolidi uniſcono i punti medii de' lati oppoſti de' Solidi corriſpondenti.

COROLLARIO II.

§. 451. E poichè ne' Solidi Regolari, che àn lati oppoſti, a due lati contigui ſon oppoſti altri due anche contigui; perciò ne' Solidi di Seconda operazione a due angoli contigui debbon opporſene altri due anche contigui; dal che potran dirſi in eſſi

DEFINIZIONE IV.

§. 452. Lati oppoſti quelli, che tramezzano angoli relativamente oppoſti; cioè, che ànno in eſſi gli eſtremi alterni, giacchè ſi moſtreran paralleli.

CO-

COROLLARIO.

§. 453. Gli aſſi dunque anche in sì fatti Solidi uniſcono gli eſtremi alterni de' lati oppoſti.

DEFINIZIONE V.

§. 454. Corde ſon le rette, che uniſcono gli eſtremi corriſpondenti de' lati oppoſti.

LEMMA I.

§. 455. *Le rette, che uniſcono i punti medii de' lati contigui di un angolo di un Solido Regolare ſono in un piano, e comprendono un rettilineo regolare ſimile ad ogn' interno rettilineo dello ſteſſo Solido Regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. Rappreſenti ABCDEF quella piramide angolare, che taglia da un qualunque Solido Regolare la baſe del ſuo angolo A; e ſiano GHIKL i punti medii de' lati convenuti nello ſteſſo angolo; e ſiano Fig. 29.

in fine i contigui di queſti uniti dalle rette GH HI IK KL LG.

Queſte rette, dividendo proporzionatamente i lati de' triangoli ABC ACD ADE AEF AFB; ſaran relativamente parallele ai lati del ſottopoſto rettilineo; comprenderanno dunque angoli a quelli del rettilineo ſottopoſto eguali, e ſarà il piano d'ognuno di quegli angoli al piano del ſottopoſto rettilineo parallelo; ſaran dunque quegli angoli in un piano alla baſe parallelo, altrimente i diverſi piani di eſſi ſarebbero anche paralleli tra loro, e ſi ſarebbero incontrati; ma in ogni piramide il piano alla baſe parallelo è un rettilineo ſimile alla baſe; le rette dunque &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 456. Produce dunque la Seconda Operazione ſotto gli angoli dell'Ottaedro ſei quadrati; ſotto quelli del Cubo otto triangoli equilateri, ſotto quelli del Dodecaedro venti; e ſotto quell'in fine dell' Icoſaedro dodici pentagoni regolari(§ 21).

COROLLARIO II.

§. 457. La Seconda Operazione taglia dalle angolari piramidi del Solido Regolare Corrispondente tante altre picciole piramidette a quelle simili, e l'ottava parte di ognuna di esse; giacchè ne sono i lati omologhi : : 1 : 2.

LEMMA II.

§. 458. *Nel triangolo equilatere, nel quadrato, nel pentagono regolare, unendo il punto medio d'ogni lato con quelli de' lati contigui, si costituisce in ciascuno di essi un simile rettilineo regolare.*

DIMOSTRAZIONE.

I. I triangoli ADF BDE CEF ànno per l'ipotesi due lati eguali a due lati, e gli angoli in quelli compresi eguali; eguali anche avran dunque le basi; e perciò DEF è un triangolo equilatere. Fig. 30.

II. Per la stessa ragione EFGH sarà un quadrilatere equilatere, e perciò paral- Fig. 31.

rallelogrammo ; ma è retto l'angolo FEH, essendo semiretti gli angoli AEF DEH; dunque è quadrato.

Fig 32. III. Per la stessa ragione FGHIK sarà un pentagono equilatere ; ma essendo FG parallela ad AC , FK parallela a BE , per la proporzionale divisione che fanno de' rispettivi lati ; saranno parallele a CD DE lati a quelle corde opposti , e farà perciò l'angolo GFK eguale all' angolo CDE ; e così per la stessa ragione saran tutti gli altri angoli dell' interno pentagono eguali agli altri angoli dell'esterno; sarà dunque FGHIK un pentagono Regolare. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 459. E poichè tagliando dai Solidi Regolari gli angoli Solidi con quei piani , che nascono in essi unendo i punti medii de' lati contigui convenuti in ogni di lor angolo Solido, resta ne' piani di essi, cioè ne' triangoli equilateri , ne' quadrati , ne' pentagoni regolari , unito il punto medio d'ogni lato con quelli de' lati contigui ; nascon dunque colla se-

ſeconda Operazione ne' piani dell'Ottaedro, del Cubo, del Dodecaedro, dell'Icoſaedro ſimili rettilinei regolari; naſcon perciò ne' piani dell'Ottaedro otto triangoli equilateri, in quelli del Cubo ſei quadrati, in quelli del Dodecaedro dodici pentagoni regolari, ed in quelli in fine dell'Icoſaedro venti triangoli equilateri.

COROLLARIO II.

§.460. Ma ſono sì nati piani in ognuno di quei Solidi anche relativamente equilateri (§ 445); ſaranno dunque quei triangoli, quei quadrati, quei pentagoni, non ſolo regolari, ma anche eguali.

AVVERTIMENTO.

§. 461. Se dalla ſola reciſione degli angoli ſi ſon veduti naſcere i piani ſotto gli angoli, e gli altri nei piani; dovrem dire, che ne' Solidi di ſeconda operazione ogni lato ſia comune ad un piano degli angoli ad uno de' piani; ſicchè in queſti Solidi ogni piano degli angoli aderiſce ſolo a quelli de' piani, ed ognuno de' piani ſolo a quelli degli angoli (§ 5).

PROPOSIZIONE I.

§. 462. *I Solidi, che naſcono dalla Seconda Operazione nell' Ottaedro, e nel Cubo ſon terminati da otto eguali triangoli equilateri, e ſei eguali quadrati, così combinati, che ad ogni triangolo aderiſcano ſolo quadrati ad ogni quadrato ſolo triangoli.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Naſcono dalla Seconda Operazione ne' piani dell' Ottaedro otto eguali (§ 460) triangoli equilateri (§ 459), ſotto gli angoli dello ſteſſo ſei eguali quadrati (§ 456); e naſcono dalla ſteſſa operazione ſotto gli angoli del Cubo otto eguali triangoli equilateri, ne' piani dello ſteſſo ſei eguali quadrati; i Solidi dunque, che dalla Seconda Operazione naſcon nell'Ottaedro, e nel Cubo ſon come s'è propoſto terminati.

II. Ma in sì fatti Solidi ogni piano, che naſce ne' piani aderiſce ſolo a quelli, che naſcono ſotto gli angoli, ed ognu-

no

no di questi aderisce solo a quelli, che nascon ne' piani (§ pr); son dunque i piani di tali Solidi anche combinati, come s'è detto, e D. D.

COROLLARIO I.

§. 463. I Solidi, che nascono nell' Ottaedro, e nel Cubo dalla Seconda Operazione son simili.

COROLLARIO II.

§. 464. L' espressa combinazione de' piani di sì fatti Solidi importa, che in ogni Solido di lor angolo siano due angoli di triangoli, due di quadrati collo stess' ordine disposti.

PROPOSIZIONE II.

§. 465. *I Solidi, che nascono nel Dodecaedro, e nell' Icosaedro dalla Seconda Operazione son terminati da venti eguali triangoli equilateri, e dodici eguali pentagoni regolari disposti in modo, che ad ogni triangolo aderiscano solo pentagoni, ad ogni pentagono solo triangoli.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I. La Seconda Operazione produce ſotto gli angoli del Dodecaedro venti eguali triangoli equilateri (§ 456), e ne' piani dello ſteſſo dodici eguali pentagoni regolari (§ 460), e produce per l'oppoſto ne' piani dell' Icoſaedro venti eguali triangoli equilateri ſotto gli angoli dello ſteſſo dodici eguali pentagoni regolari; I Solidi dunque, che dalla Seconda Operazione naſcono nel Dodecaedro, ed Icoſaedro ſon terminati dai piani propoſti.

II. Ma in sì fatti Solidi ogni piano, che naſce ne' piani aderiſce ſolo a quelli, che naſcon ſotto gli angoli, ognuno di queſti ſolo a quelli de' piani (§ 461); Son dunque i di loro piani anche combinati, come s' è detto, e D. D.

COROLLARIO I.

§. 466. I Solidi, che naſcono nel Dodecaedro, ed Icoſaedro dalla Seconda Operazione ſon ſimili.

COROLLARIO II.

§. 467. In ogni Solido di lor angolo convengono due angoli di triangoli, due di pentagoni collo ſteſs'ordine.

AVVERTIMENTO I.

§. 468. I Solidi dunque di Seconda Operazione non ſono, che due; giacchè ſon ſimili quelli dell'Ottaedro, e del Cubo (§ 463), ſimili quelli del Dodecaedro, ed Icoſaedro; ed è notabile, come da Solidi tanto diſſimili ſi producano dalla ſteſſa operazione Solidi Simili.

AVVERTIMENTO II.

§. 469. Dal che il Solido nato ſia nell'Ottaedro, ſia nel Cubo ſarà detto Solido Primo di Seconda Operazione; e quello nato nel Dodecaedro, od Icoſaedro Solido Secondo; ſicchè ſarà al Primo corriſpondente l'Ottaedro, ed il Cubo, ed è in fatti terminato dai piani dell'uno, e dell'altro; e ſarà al Secondo

do corrispondente il Dodecaedro, ed Icosaedro; ed è in fatti terminato dai piani del primo, e del secondo.

PROPOSIZIONE III.

§. 470. *In ogni Solido di Seconda Operazione gli assi son eguali, e tutti s'intersegano nello stesso punto bifariam.*

DIMOSTRAZIONE.

I, e II. I Solidi Regolari, che àn lati opposti son quelli, ne'quali si producono i Solidi di Seconda Operazione (§ 443). Tali lati opposti sono nello stesso piano, e paralleli (*a*), ed il centro de' Solidi Regolari ritrovasi in tutt' i piani di essi, giacchè in esso s'intersegano gli assi, che ne uniscono gli estremi alterni (*b*); ma ne' Solidi Regolari le rette che uniscono il centro co' punti medii de' lati sono ai lati perpendiculari, e sono eguali (*b*); dunque di queste quelle, che appartengono

(a) § 87 § 144 § 207 § 273.
(b) § 93. 246. 223. 280.

gono ai lati opposti sono in diretto, e forman perciò tante rette, che oltre di essere ai lati perpendiculari, sono eguali, e nel centro, per cui passa ciascuna s'intersegan *bifariam*; ma queste rette son gli assi de' Solidi di Seconda Operazione (§450). In ogni Solido dunque di Seconda Operazione gli assi sono eguali, e tutti nel medesimo punto s'intersegan *bifariam*. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 471. Perchè questo punto si dirà centro de' Solidi di Seconda Operazione; potrà perciò dirsi, che sia il centro d'ogni Solido di Seconda Operazione lo stesso, che il centro dei Solidi Regolari corrispondenti.

COROLLARIO II.

§. 472. Ad ogni Solido di Seconda Operazione potrà circoscriversi la Sfera, ed alla Sfera potrà crederſi iscritto ogni Solido di Seconda Operazione; dal che l'asse, o semiasse del Solido di Seconda Ope-

Operazione è lo ſteſſo, che l'aſſe, o ſemiaſſe della Sfera circoſcritta allo ſteſſo.

COROLLARIO III.

§. 473. Se in un Solido di Seconda Operazione ſi tirino gli aſſi, reſterà diviſo in tante piramidi quanti ſono i ſuoi piani; reſterà perciò da tale operazione diviſo il Primo in otto piramidi triangolari, e ſei quadrate; il Secondo in venti piramidi triangolari, e dodici pentagone.

COROLLARIO IV.

§. 474. Eſſendo tutti non ſolo iſoſceli, ma relativamente equilateri i triangoli, che in ciaſcuno di queſti Solidi fanno i ſemiaſſi ne' lati; ſaranno 1.° eguali tutti gli angoli, che in ciaſcuno di eſſi fanno gli aſſi, ne' lati. 2.° ſaranno in ciaſcuno di eſſi i lati dal centro equidiſtanti.

PROPOSIZIONE IV.

§. 475. *Ne' Solidi di Seconda Operazione i lati oppoſti ſon paralleli.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo in questi Solidi assi le rette, che uniscono gli estremi alterni de' lati opposti (§ 453), ed intersegandosi gli assi tutti in un punto; saranno i lati opposti nel piano degl'intersecati rispettivi assi; ma così gli assi ne uniscono gli estremi alterni, che tutti eguali in essi costituiscano gli angoli (§ pr); Son dunque in questi Solidi i lati opposti paralleli. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 476. Le Corde che uniscono gli estremi corrispondenti de' lati opposti (§ 454) chiudono con essi dei parallelogrammi rettangoli; giacchè di questi gli eguali assi son diagonali; dal che 1.° sarà il quadrato dell'asse eguale al quadrato del lato, e della Corda. 2.° essendo eguali i lati, eguali gli assi, eguali anche saranno le corde.

AVVERTIMENTO.

Figure solide. §. 477. Dal paralleliſmo de' lati oppoſti di sì fatti Solidi può volentieri moſtrarſi 1.° Che in eſſi ogni piano ne abbia un altro ſimile parallelo. 2.° Che de' lati del Solido Primo ne ſian ſei nello ſteſſo piano, e che queſti comprendano un Eſagono Regolare. 3.° Che ne' ſuoi 24. lati ſi diſtinguano quattro di tali eſagoni; i quali s' interſegano per gli angoli oppoſti, con tale inclinazione, che formino co' di loro lati gli alterni triangoli, e quadrati terminanti tal Solido. 4.° Che nel Solido Secondo de'ſuoi lati ſe ne diſtinguan dieci nello ſteſſo piano, e che queſti comprendan del pari un Decagono Regolare. 5.° Che ne' ſuoi 60. lati ſi diſtinguan ſei di tali Decagoni; e che queſti in fine s'interſeghino per gli angoli oppoſti con tale inclinazione, che formino co' di loro lati gli alterni triangoli, e pentagoni terminanti tal Solido.

PROPOSIZIONE V.

§. 478. *Nel Solido Primo di Seconda Operazione l'asse è il doppio del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Il lato del Solido, che nasce colla Seconda Operazione nell'Ottaedro è la metà del lato dell'Ottaedro; perchè base d'un triangolo equilatere della metà del suo lato (§ 444); ma essendo nell'Ottaedro lati opposti quelli, che son tali ne' suoi quadrati (§ 65); la retta, che unisce i punti medii de' suoi lati opposti, cioè l'asse del Solido, che nasce in esso dalla Seconda Operazione (§ 450), eguaglia il suo lato; dunque nel Solido, che nasce nell'Ottaedro dalla Seconda Operazione l'asse è il doppio del lato. Figur o lidee

Il lato del Solido, che nasce nel Cubo dalla Seconda Operazione è la metà della diagonale di un quadrato del Cubo, giacchè tagliando queste parti dai lati è a quella parallelo; e la retta, che unisce i punti medii de' suoi lati oppo-

ſti, cioè l'aſſe del Solido, che naſce in eſſo dalla Seconda Operazione (§ 450), eguaglia la ſteſſa Diagonale; giacchè con eſſa uniſce gli eſtremi degli oppoſti (e perciò paralleli) ed eguali ſemilati; dunque nel Solido nato nel Cubo dalla Seconda Operazione l'aſſe è il doppio del lato; e perciò nel Solido Primo &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 479. Il Solido Primo di Seconda Operazione è iſcrittibile in quella Sfera il di cui ragio eguaglia il ſuo lato (§ 472).

COROLLARIO II.

§. 480. Se in queſto Solido ſi tirino gli aſſi ſaran tutti equilateri i triangoli, che i ſemiaſſi fanno ne' lati; e perciò reſterà tal Solido diviſo dagli aſſi in otto piramidi regolari, e ſei piramidi quadrate Ottaedrali del ſuo lato.

COROLLARIO III.

§. 481. Essendo nell'Ottaedro il quadrato del lato a quello dell'asse, come 1 : 2 = 2 : 4 (§ 94); sarà quello del lato a quello del semiasse, o sia a quello dell'altezza della sua piramide quadrata, come 2 : 1 = 6 : 3 (§ 95); ma nella Piramide Regolare il quadrato del lato è a quello del suo asse, o sia della sua altezza (§ 35), come 3 : 2 = 6 : 4 (§ 51); dunque il quadrato dell'altezza della prima è a quello dell'altezza della seconda, dando ad esse egual i lati, come 3 : 4, e perciò così sono i quadrati delle distanze, che ànno dal centro nel Solido Primo di Seconda Operazione i suoi quadrati, ed i suoi triangoli (§ pr); non sarà dunque in esso iscrittibile la Sfera.

AVVERTIMENTO I.

§. 482. Questo Solido dunque à di comune co' Solidi Regolari il comprendere un punto dagli angoli (§ 470), e dai lati equidistante (§ 474); di proprio

il non esser tal punto anch' equidistante dai piani (§ pr); le distanze però, che à il centro dai piani simili sono eguali, siccome eguali sono le altezze delle piramidi regolari, e piramidi quadrate Ottaedrali di lati eguali.

AVVERTIMENTO II.

§. 483. Anche i piani del Solido Secondo sono dal centro egualmente distanti i simili, inegualmente distanti i dissimili; si conosce il primo dall' esser delle Piramidi simili, e similmente poste (come son quelle de' piani simili, nelle quali è diviso quel Solido dagli assi) eguali le altezze; si conosce il secondo dall' essere i quadrati delle altezze di sì fatte dissimili piramidi eguali alle differenze de' quadrati in una del Semiasse, e del ragio triangolare di circoscrizione, in un' altra dello stesso semiasse, e del ragio pentagonale di circoscrizione, e dall' esser tal Solido equilatere (§ 445).

COROLLARIO.

§. 484. E' dunque proprio de' Solidi di Seconda Operazione il convenir co' Solidi Regolari nelle due prime equidistanze (§§ 470, 474), e 'l non convenire nell' ultima.

PROPOSIZIONE VI.

§. 485. *Il Solido Primo di Seconda Operazione è ventuplo della Piramide Regolare del ſuo lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Reſta queſto diviſo dagli aſſi in otto piramidi regolari, e ſei piramidi quadrate Ottaedrali del ſuo lato (§ 480); ma ognuna di queſte è doppia d' ognuna di quelle (§ 61); dunque il Solido Primo di Seconda Operazione è ventuplo della Piramide Regolare del ſuo lato. C.D.D.

PROPOSIZIONE VII.

§. 486. *Il Solido colla Seconda Operazione nato nell' Ottaedro ſta all' Ottaedro, come* 5 : 8.

DIMOSTRAZIONE.

Ogni piramidetta, che colla Seconda Operazione ſi taglia dall' Ottaedro è ſimile alla ſua piramide quadrata, e l'ottava parte di quella (§ 457); ſaran dunque tutte le piramidette con quella Operazione tagliate dall' Ottaedro alla ſua piramide quadrata, come 6 : 8 = 3 : 4; all' Ottaedro, come 3 : 8 (§ 88); e ſarà perciò quel, che queſte laſciano dell' Ottaedro, cioè il Solido di Seconda Operazione all' Ottaedro, come 5 : 8. C.D.D.

COROLLARIO.

§. 487. Sarà perciò il Solido Primo di Seconda Operazione all' Ottaedro del ſuo lato, come 5 : 1 (§ 444).

PRO-

PROPOSIZIONE VIII.

§. 488. *Il Solido colla Seconda Operazione nato nel Cubo ſta allo ſteſſo, come* 5 : 6.

DIMOSTRAZIONE.

Ogni piramidetta colla Seconda Operazione tagliata dal Cubo ſta alla piramide angolare dello ſteſſo, come 1 : 8 (§ 457); tutte dunque le così tagliate eguagliano una di queſte; ma una di queſte ſta al Cubo come 1 : 6 (§ 175); dunque anche quelle, e perciò ſtarà quanto quelle laſciano del Cubo (cioè il Solido nato nello ſteſſo colla ſeconda Operazione) al Cubo, come 5 : 6. C. D. D.

PROPOSIZIONE IX.

§. 489. *Ogn' interno rettilineo de' Solidi di ſeconda operazione è in un piano, ed è iſcrittibile al cerchio.*

DIMOSTRAZIONE.

I. e II. Son queſti Solidi equilateri (§ 445), ed iſcrittibili alla Sfera (§ 472); è dunque ogn' interno di lor rettilineo in un piano, ed è iſcrittibile al cerchio (§ 83); C. D. D.

PROPOSIZIONE X.

§. 490. *Ogn' interno rettilineo de' Solidi di Seconda Operazione è rettangolo.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo de' quattro angoli convenuti in ogni angolo di sì fatti ſolidi eguali gli oppoſti (*a*), e tutti da eguali lati compreſi (§ 445); ſaranno i piani ad eſſi ſottopoſti (§ pr), quadrilinei, ne' quali ſon eguali i lati oppoſti; e perciò parallelogrammi; ma ſono iſcrittibili al cerchio (§ pr), ed i parallelogramm' iſcrittibili al cerchio ſon rettangoli; rettangolo

(a) 464. 467.

golo è dunque ogn'interno rettilineo de' Solidi di Seconda Operazione C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 491. Essendo de' lati intorno ad un angolo d' ogni sì fatto rettangolo, nel Solido Primo, uno lato dello stesso Solido, l' altro diagonale de' suoi quadrati; e nel Secondo, uno lato dello stesso Solido, l' altro corda de' suoi pentagoni; ed essendo in sì fatti Solidi eguali i lati, e perciò anche eguali tanto le diagonali del Primo, quanto le corde del Secondo; saranno in ognuno di sì fatti solidi simili, ed eguali gl' interni rettangoli.

COROLLARIO II.

§. 492. E poichè sono tanto ne' quadrati, quanto ne' pentagoni regolari ai lati proporzionali le diagonali, le corde; saranno perciò sì fatti rettangoli anche simili appartenendo a diversi Solidi Primi, o a diversi Solidi Secondi.

CAPO

CAPO X.

Delle proprietà della Sfera, delle quali si viene a notizia da quelle de' Solidi Regolari, e di Seconda Operazione.

DEFINIZIONI.

DEFINIZIONE I.

§. 493. Più Sfere, che si toccano si diranno annularmente congiunte, se di esse ognuna ne tocchi altre due; perchè in tale posizione l'ultima della successiva congiunzione è necessario, che anche sia colla prima congiunta; e così le rette, che uniscono di quelle, che si toccano i centri chiudano spazio. Così perchè le Sfere A B C D (*fig.*33), quantunque si tocchino l'una l'altra, di esse però l'estreme non ne

toc-

toccan, che una, onde le rette, che uniſcono di quelle, che ſi toccano i centri non chiudono ſpazio, non poſſon dirſi annularmente congiunte; Le Sfere poi EFH (*fig.*34) IKLM NOPQR (*fig.*35) ſono annularmente congiunte, perchè ognuna ne tocca altre due, e così le rette, che uniſcono i centri delle toccantiſi chiudono ſpazio.

DEFINIZIONE II.

§. 494. I varj rettilinei, che poſſono eſibire gli uniti centri di varie sfere eguali annullarmente in diverſa forma congiunte daran nome alle varie combinazioni delle medeſime; quindi ſi diranno combinate a triangolo, a quadrangolo, a pentagono, ſe tali ſiano que' di loro rettilinei.

AVVERTIMENTO.

§. 495. Potendo le sfere annularmente congiunte eſſer nello ſteſſo piano, ed in diverſo, poſſon perciò i rettilinei che danno gli uniti centri di eſſe eſſer uno

ſteſſo

ſteſſo piano, e diverſi; perciò col nome di rettilineo quì non s'intende un piano rettilineo, ma un ſucceſſivo, ed annulare congiungimento di rette.

COROLLARIO I.

§. 496. Poichè però il triangolo è ſempre uno ſteſſo piano, perciò il rettilineo, che danno tre sfere eguali annularmente congiunte è ſempre un piano rettilineo.

COROLLARIO II.

§. 497. Paſſando ogni retta che unisce i centri di due sfere, che ſi toccano, (come fa ogni lato d'ogni sì fatto rettilineo) pel punto del contatto, ſarà ogni lato d' ogni sì fatto rettilineo l'aggregato di due eguali ragi, e ſarà perciò ogni sì fatto rettilineo equilatere; e l' eſibito da tre sfere eguali annularmente congiunte ſarà un piano triangolare equilatere.

LEMMA

LEMMA I.

§. 498. *De' rettilinei quadrangoli esibiti da Sfer' eguali annularmente congiunte ciascuna diagonale è maggiore del lato.*

DIMOSTRAZIONE.

Non può dirsi MK eguale al lato MI, perchè allora si toccherebbero anche le Sfere, poste co' centr' in M K, e sarebbero quelle Sfere combinate in due triangoli aderenti, come sono le Sfere E F G H (*fig.*34), e non in un quadrangolo, locchè è contro l' ipotesi; nè può dirsi minore, perchè allora in M K non potrebbero essere i centri di due Sfere eguali ad I; locchè parimente distruge l' ipotesi; dunque &c. C. D. D. Fig.35

AVVERTIMENTO.

§. 499. Così per la stessa ragione delle Sfere combinate a pentagono, o in qualunque altra combinazione di maggior numero di lati le rette LO LP (*fig.*35) che

che unisconi i centri di quelle, che sono negli angoli non contigui son sempre maggiori del lato LK del rettilineo medesimo,

COROLLARIO I.

§. 500. Poichè nel solo triangolo non vi son angoli non contigui, cioè, che non abbiano un lato comune, che li unisce, perciò delle sole sfere combinate a triangolo non ve ne sono, che non si toccano; di quelle combinate a quadrangolo ve ne son due coppie, che non si toccano, di quelle combinate a pentagono ve ne son cinque, e così molto più in appresso; sarà dunque giusto l'asserire, che delle sfere annularmente congiunte le massimamente aderenti siano le combinate a triangolo, poi quelle combinate a quadrangolo, e così gradatamente in appresso; sicchè le massimamente aderenti saran quindi le stesse, che le aderenti a triangolo.

COROLLARIO II.

§. 501. Quindi, poichè una Sfera sarebbe da per tutto circondata, e toccata

dal

dal massimo numero di altre Sfere eguali a se, ove sian queste tutte massimamente aderenti; potrem dire, che questo avverrebbe, ove fusser tutte aderenti a triangolo.

LEMMA II.

§. 502. *Se sopra tre Sfer'eguali A B C annularmente congiunte nel triangolo ABC si metta la quarta D parimente eguale in modo, che le tocchi tutte tre, e si unischi il suo co' centri di quelle, resterà fatta su quel triangolo una piramide Regolare.* Fig. 36.

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo, per l'ipotesi la quarta Sfera sopra le tre prime, sarà il suo centro D fuori la direzione del triangolo ABC, che passa per gli centri di quelle; le rette dunque, che l'unischono co' centri di quelle, e perciò co' vertici di quel triangolo costituischono in esso una piramide triangolare.

II. Ma sono in questa equilateri i triangoli tutti (§ 497); sarà dunque Regolare (§ 31) C. D. D.

AV-

AVVERTIMENTO.

§. 503. Si dirà, che un rettilineo ſii adattato in una Sfera, ſe tutti i ſuoi angoli ne tocchino la ſuperficie.

LEMMA III.

Fig. 36. §. 504. *Le rette, che uniſcono i punti E F G, ne' quali la quarta Sfera D tocca le tre prime annularmente congiunte comprendono un triangolo equilatere del comun ragio, che reſta nella Sfera D adattato.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Avendo i triangoli EDF FDG GDE gli angol' in D di triangoli equilateri (§ 497), ed i lati DE DF DG eguali per ipoteſi; ſaranno tutti eguali triangoli equilateri, e ſarà perciò il triangolo EFG non ſolo equilatere, ma del lato eguale al comun ragio delle Sfere.

II. Ma avendo dall'ipoteſi ogni lato di queſto gli eſtremi in due punti della ſuperficie della quarta Sfera D; ſaranno

in

in tre punti di essa tutti i suoi angoli; sarà dunque il triangolo EFG nella quarta Sfera D adattato; e perciò le rette &c. C. D. D.

COROLLARIO I.

§. 505. Se fusse dunque la Sfera D da per tutto circondata, e toccata da altre Sfere eguali a se sommamente aderenti, o sia combinate a triangolo, e si unissero in essa tutti i punti del contatto, resterebbe nella stessa iscritto un Solido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al suo ragio.

AVVERTIMENTO.

§. 506. Così del pari si osserva, che se le Sfere circondanti, e toccanti (che saran dett' esteriori) altra Sfera eguale a se, (che sarà detta interiore) siano combinate parte a triangolo, e parte a quadrilatere, imprimeranno queste nella interiore tali punti di contatto, che unitine i contigui, cioè gl' impressi dalle Sfere, che si toccano, si avrà un Solido

iſcritto nella interiore di lati tutti eguali al ſuo ragio terminato da triangoli, e quadrilateri.

COROLLARIO II.

§.507. Ogni retta, che uniſce i punti, ne' quali una Sfera ne tocca altre due eguali a ſe, che ſi toccano eguaglia il comun ragio; dal che ſegue, 1.° ſe due punti preſi nella ſuperficie Sferica diſtino tra ſe pel ragio della Sfera ſteſſa, potrà quella Sfera eſſer in quei punti toccata da altre due sfere a ſe eguali, che ſi toccano; 2.° ſe ſiavi perciò un Solido iſcrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al ſuo ragio, iſcritto queſto nella Sfera diſegnerà co' ſuoi angoli tali punti in eſſa da poter eſſer in quelli ſimultaneamente toccata da tante altre Sfere eguali a ſe, quanti ſono i ſuoi angoli, che ſi tocchino nelle combinazioni eſpreſſe dai piani del Solido; e ſiccome un tal Solido col numero de' ſuoi angoli additerebbe il numero dell' eſteriori Sfere toccanti; così col numero de' lati convenuti in ogni ſuo angolo ſolido, moſtrandoci ciaſcun ſuo angolo ſolido a quanti

ti altri angoli ſia contiguo, ci farebbe conoſcere, ogni eſterna Sfera quante altre eſterne ne tocchi; 3.° ſe poi i punti preſi nella Sfera ſian tali, che la retta, che l'uniſce ſii minore del ſuo ragio, non potrà in quelli eſſer toccata ſimultaneamente da due Sfere eguali a ſe; 4.° e ſe in fine ſian tali, che la retta, che l'uniſce ſii maggiore del ſuo ragio, lo potrà certamente, ma le Sfere, che in quelli la toccano non ſi toccheranno tra loro.

PROPOSIZIONE I.

§. 508. *La Sfera non può eſſer da per tutto toccata da qualunque numero di Sfere eguali a ſe ſommamente aderenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Se poteſſe la Sfera da per tutto toccarſi da sfere eguali a ſe ſommamente aderenti, uniti in eſſa i punti del contatto, reſterebbe in eſſa iſcritto un ſolido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al ſuo ragio (§ 505); verrebbe dunque ad iſcri-

verſele o una Piramide Regolare, o un Ottaedro, o un Icoſaedro di lati eguali al ſuo ragio; ma è maggiore del ragio della Sfera il lato della Piramide (§ 52), dell'Ottaedro (§ 94), dell'Icoſaedro iſcritto in eſſa (§ 300); non può dunque iſcriverſi alla Sfera un Solido sì fatto; e perciò neppur può eſſa da per tutto toccarſi da qualunque numero di Sfere eguali a ſe ſommamente aderenti. C. D. D.

AVVERTIMENTO I.

§. 509. Eſiſtono altri due Solidi anche terminati da eguali triangoli equilateri, e ſon gl'Innominati (§ 414); ma non ſon queſti nella Sfera iſcrittibili (§ 426); ſicchè la di loro eſiſtenza neppur per ombra ſi oppone alla ſtabilita verità.

AVVERTIMENTO II.

§. 510. Se poteva nella Sfera iſcriverſi un ſolido della diſegnata natura il maſſimo numero di sfere, dalle quali poteva una Sfera da altre eguali toccarſi, ſarebbe ſtato dodici (§ 507), quanti cioè

cioè, ſon gli angoli dell'Icoſaedro, che più ne abbonda; e ſiccome nell'Icoſaedro ogni angolo ſolido ne à altri cinque contigui, così allora ognuna dell' eſteriori Sfere ne avrebbe toccate altre cinqu'eſteriori annularmente congiunte.

PROPOSIZIONE II.

§. 511. *Può la Sfera ſimultaneamente toccarſi da dodici altre Sfere eguali a ſe non tutte ſommamente aderenti.*

DIMOSTRAZIONE.

Il Solido Primo di Seconda Operazione è iſcrittibile in quella Sfera, il di cui ragio eguaglia il ſuo lato (§ 479); iſcritto dunque queſto nella Sfera diſegnerà in eſſa co' ſuoi angoli tali punti, da poter eſſer in quelli ſimultaneamente toccata da tante altre Sfere eguali a ſe, che ſi toccano nelle combinazioni eſpreſſe dai ſuoi piani (§ 507); ma ſon dodici gli angoli di un tal Solido (§ 447); e ſono i ſuoi piani triangoli equilateri, e quadrati (§ 462); e diſegnano i pri-

mi la somm' aderenza, e non i secondi (§ 500); può dunque la Sfera simultaneamente toccarsi da dodici altre Sfere eguali a se non tutte sommamente aderenti. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 512. Convenendo in ogni angolo solido del Solido Primo di Seconda Operazione quattro angoli piani (§ 464); e perciò quattro lati (§ 6); sarà in esso ogni angolo solido ad altri quattro contiguo (§ 8), e perciò ciascuna dell'esteriori dodici Sfere, sarà nell'esibita combinazione toccata da altre quattro esteriori (§ 507).

COROLLARIO II.

§. 513. E poichè così convengono in ogni angolo di un tal Solido quattro lati, che comprendano in esso due angoli di triangoli equilateri, e due di quadrati, e così combinati, che non aderiscano due di questi angoli simili, che ne' soli vertici (§ 464); perciò delle quattro Sfere esteriori, dalle quali ogni altra este-

esteriore è toccata nell' esibita combinazione due coppie di prospetto son colla quinta sommamente aderenti, le altre due coppie le sono nell'aderenza prossima alla massima (§ 500).

AVVERTIMENTO I.

§.514. Se poteva nella Sfera iscriversi un Solido da per tutto terminato da eguali triangoli equilateri di lati eguali al suo ragio, poteva la Sfera esser da per tutto simultaneamente toccata da Sfere eguali a se sommamente aderenti (§ 505) ed il massimo numero di queste sarebbe stato dodici (§ 510); Ora la vediamo toccata da dodici non tutte sommamente aderenti? Par che questo a quello si opponga, ma non è punto così; giacchè, essendo il lato dell' Icosaedro maggiore, e non minore del ragio della Sfera, in cui è iscrittibile (§ 300), possonbenissimo ne' punti disegnati dagli angoli dell' Icosaedro adattarsi dodici sfere eguali all' interiore, ma queste toccherian quella, ma non si toccheranno tra loro (§ 507); ecco perchè le stesse dodici sian sufficien-

ti a toccarſi anche tra loro in una combinazione, in cui non tutte ſommamente aderiſcano.

AVVERTIMENTO II.

§. 515. Dalla cognizione de' Solidi Regolari s'è dedotto, che non poſſa la Sfera toccar ſimultaneamente qualunque numero di altre sfere eguali a ſe ſommamente aderenti; e da quella del Solido Primo di Seconda Operazione, che poſſa toccarne dodici, ma non tutte ſommamente aderenti; reſta dunque a vederſi, ſe la combinazione delle dodici additata da quel Solido ſia quella, nella quale l' eſteriori abbian tra ſe la maſſima poſſibile aderenza, per poter quindi giuſtamente aſſerire, che non poſſa la Sfera toccar più di dodici altre Sfere eguali a ſe. Queſto ſi vedrà nelle ſeguenti propoſizioni, premeſſe alcune definizioni, ed aſſiomi.

DEFINIZIONE I.

§. 516. Un angolo Solido ſi dirà equilatere, ſe ne ſiano tutti eguali i lati.

DE-

DEFINIZIONE II.

§.517. Un angolo Solido ſi dirà adattabile nella Sfera, ſe immeſſo in eſſa in modo, che il ſuo vertice ne tocchi la ſuperficie, tutti gli eſtremi de' ſuoi lati la tocchino ſimultaneamente in tanti altri punti.

DEFINIZIONE III.

§. 518. Un angolo Solido adattabile nella Sfera, ſe abbia gli eſtremi de' ſuoi lati nello ſteſſo piano, perchè adattato in eſſa l'avrà nella periferia della ſteſſa ſua ſezione, ſi dirà compreſo, o comprenſibile da quella porzione Sferica, che vien tagliata dalla ſteſſa ſezione.

COROLLARIO I.

§. 519. Di un angolo ſolido comprenſibile in porzione Sferica ſarà l'interno, e ſottopoſtogli rettilineo iſcrittibile al cerchio, ch'è baſe della ſteſſa porzione; e perciò ſe di un angolo ſolido non ſia il ſottopoſtogli rettilineo iſcrittibile al cerchio,

chio, non sarà comprensibile in porzione sferica.

COROLLARIO II.

§. 520. Poichè di un angolo Solido adattato nella Sfera restano i lati tutti adattati nella stessa (§ 80 e 517); perciò, se un angolo Solido adattato nella Sfera sia equilatere, perchè allora à gli estremi de' lati nello stesso piano (§ 82); sarà compreso da Sferica porzione, quella cioè, che vien tagliata dal piano, nel quale son gli estremi de' lati di esso, e ne sarà il sottoposto gli rettilineo iscrittibile al cerchio (§ 82).

COROLLARIO III.

§. 521. Se di un angolo Solido equilatere, e comprensibile in porzione Sferica uno, o più lati si faccian muovere con i soli estremi, che sono nella periferia della base della porzione medesima, senza però uscire dalla stessa periferia, resterà tuttavia comprensibile dalla stessa porzione; ma se quell' uno, o più lati si faccia, o faccian muovere uscendo da quel-

quella periferia, reſterà da quella moſſa l'angolo così alterato, che non ſarà più comprenſibile da quella porzione.

DEFINIZIONE IV.

§. 522. Porzioni Omologhe di Sfere ſi diran quelle, che o tutte comprendono, o tutte eſcludono il centro delle riſpettive Sfere.

DEFINIZIONE V.

§. 523. Si dirà lato della porzione Sferica qualunque retta, che eſtendeſi dal ſuo vertice ad un qualunque punto della periferia della ſua baſe.

COROLLARIO.

§. 524. Eguagliando il quadrato d'ogni lato di Sferica porzione i quadrati fatti uno nell'altezza, e l'altro nel ragio della baſe della porzione medeſima; ſaranno tutti eguali i lati d'ogni Sferica porzione.

AS-

ASSIOMA I.

§. 525. Ogni retta ſegante la Sfera non tocca la ſua ſuperficie, che in due ſoli punti.

ASSIOMA II.

§. 526. La ſuperficie Sferica è in ogni ſua parte uniformemente incurvata.

COROLLARIO I.

§. 527. Quindi, poichè ove s'intenda di un Solido inverſa la ſuperficie, così cioè, che i ſuoi piani occultino gli aſpetti eſterni, manifeſtino gl' interni, naſce un Solido al primo del tutto ſimile, ed eguale col ſolo divario, che ſian nel ſecondo i piani, e gli angoli diſpoſti in ordine inverſo di quello, ch' eran nel primo diſpoſti; perciò, ove s'intenda ciò fatto di un Solido iſcrittibile alla sfera, naſcerà un Solido anche nella ſteſſa sfera iſcrittibile.

CO-

COROLLARIO II.

§. 528. Le porzioni Sferiche della ſteſſa Sfera, o di Sfer' eguali, ſe ſi ſoprappongano in modo, che il vertice di una vada ſul vertice dell' altra combaceranno in tutta la corriſpondente eſtenſione.

LEMMA.

§. 529. *Ogni angolo Solido di un Solido iſcrittibile alla Sfera è adattabile nella Sfera ſteſſa.*

DIMOSTRAZIONE.

Eſſendo il Solido, a cui quell' angolo appartiene, per ipoteſi, iſcrittibile alla Sfera, iſcritto in queſta, dovranno tutti i ſuoi angoli ſolidi ſimultaneamente toccarla; dovranno perciò toccarla tutti gli eſtremi de' ſuoi lati, che non ſon, che negli angoli; dovrà dunque toccarla ogni angolo ſolido, e gli eſtremi de' lati convenuti nello ſteſſo; negandoſi dunque, che immeſſo quell' angolo ſolido nella Sfera,

Sfera, (cui è il ſolido, a cui eſſo appartiene iſcrittibile) in modo, che il ſuo vertice ne tocchi la ſuperficie, debbano anche gli eſtremi dei ſuoi lati ſimultaneamente toccarla, cioè negandoſi l'adattabilità di quell'angolo (§ 517), verrebbe a dirſi eſſer quella ſuperficie sferica in una ſua parte difformemente incurvata, che in un'altra; ma queſto ripugna (§ 526.); dunque ogni angolo Solido di un Solido alla Sfera iſcrittibile è adattabile nella ſteſſa. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 530. Ogni angolo Solido di un Solido iſcrittibile nella sfera anche rivoltatoſi è adattabile nella sfera ſteſſa(§ 527).

PROPOSIZIONE III.

§. 531. *Non poſſon eſſere nella ſteſſa Sfera iſcrittibili due ſolidi ſimili, ed ineguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Lo ſiano, s'è poſſibile, e ſiano due omologhi, e perciò eguali (§ 407) angoli di eſſi ABCD aFGH. Poſſon queſti eſſer combaciabili, e poſſon non eſſerlo (§ 392); ſiano in prima tali, e ſi ſupponga l'angolo a ſoprappoſto corriſpondentemente, e combaciato coll'angolo A; caderanno però gli eſtremi de' lati dell' angolo a in punti diverſi da quelli, ne' quali ſono gli eſtremi dell' angolo A; giacchè altrimente ſarebbero eguali i lati omologhi di quei ſolidi, e così eguali i ſolidi ſteſſi, locchè è contro l'ipoteſi. Fig. 16.

Or, ciò fatto, ſe fuſſero i ſolidi, ai quali appartengono i ſolidi angoli A a iſcrittibili nella ſteſſa Sfera, ſarebbero queſti angoli in queſta ſteſſa Sfera adattabili (§ 529), e perciò conſiderato in queſta immeſſo il raddoppiato angolo ABCD in modo, che il vertice A ne tocchi la ſuperficie, dovrebbe ciaſcun ſuo lato toccar la ſteſſa in tre punti; ma queſto ripugna (§ 525); non poſſon dunque eſſer nella ſteſſa Sfera iſcrittibili i diſegnati ſolidi ſimili, ed ineguali.

Siano

Siano in ſecondo quegli angoli incombaciabili, e ſi ſupponga uno di eſſi rivoltarſi, e ſoprapporſi corriſpondentemente all'altro, che ſi vedran combaciare (§ 394); ma, ſe tuttavia fuſſero, come ſi ſuppongono, quei ſolidi, ai quali tali angoli appartengono iſcrittibili nella ſteſſa Sfera, ſarebber tuttavia tali angoli nella ſteſſa Sfera adattabili (§ 530); avrebbe dunque in eſſi anche luogo, come nella prima ipoteſi, la ſteſſa contraddizione; non poſſon dunque eſſere nella ſteſſa Sfera iſcrittibili due ſolidi ſimili, ed ineguali. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 532. Dallo ſteſſo tenore della precedente dimoſtrazione s'è veduto, che non poſſano eſſere nella ſteſſa Sfera adattabili due eguali angoli ſolidi, de' quali ſiano i lati omologhi relativamente ineguali.

AVVERTIMENTO.

§. 533. Ove una Sfera ne tocchi qualunque numero di altre annularmente con-

giun-

giunte reſta con ciaſcuna coppia delle toccantiſi aderente a triangolo ; or sì fatta combinazione ſi vedrà aver luogo fra Sfere eguali poſte tutte nel medeſimo piano; ma non in quelle, che ne circondano e toccano altra eguale.

LEMMA.

§. 534. *La retta, che uniſce i centri di due Sfere eguali poſte in un piano è parallela a quella, che uniſce nel piano i punti del contatto.*

DIMOSTRAZIONE.

Giacchè, eſſendo ogni retta, che uniſce il centro di una Sfera col punto del contatto al piano normale, quelle dell'ipoteſi uniſcono due rette eguali, e parallele. C.D.D.

COROLLARIO I.

§. 535. Ove dunque una Sfera ne tocchi varie eguali poſte tutte nello ſteſſo piano, le rette, che uniſcono il ſuo co' centri di quelle ſon tutte in un medeſimo piano, al piano delle Sfere parallelo.

COROLLARIO II.

§. 536. E poichè nella retta, che unisce i centri delle Sfere, che si toccano trovasi il punto del contatto, perciò i punti, ne' quali una Sfera ne tocca qualunque numero di altre eguali poste tutte nel medesimo piano, sono in un medesimo piano a quello delle Sfere parallelo, ed in esso sono i centri tutti delle Sfere.

COROLLARIO III.

§. 537. I punti dunque, ne' quali una Sfera ne tocca altre eguali a se poste tutte nel medesimo piano, sono in un suo cerchio massimo al piano delle Sfere parallelo.

PROPOSIZIONE IV.

§. 538. *Ogni Sfera può toccarne altre sei eguali a se annularmente congiunte poste tutte nel medesimo piano.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

I punti, ne' quali una Sfera ne tocca altre eguali a ſe poſte tutte nel medeſimo piano ſono in un ſuo cerchio maſſimo a quel piano parallelo (§ pr); ma in ogni cerchio maſſimo della Sfera poſſon giuſto ſucceſſivi, ed annularmente li ati adattarſi ſei ragi della ſteſſa; può dunque ogni Sfera toccarne altre ſei eguali a ſe annularmente congiunte poſte tutte nel medeſimo piano (§ 507). C. D. D.

PROPOSIZIONE V.

§. 539. *Delle Sfere, che circondano, e toccano altra Sfera eguale a ſe niuna può toccarne qualſivoglia numero di eſſe, che ſian tra ſe annularmente congiunte.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, ſe fuſſe ciò poſſibile, reſtando una sì fatta Sfera con ogni coppia delle toccantiſi nell'annulare congiungimento aderente a triangolo (§ 533),

ove ſi uniſſero nella Sfera interiore i punti di sì fatti contatti, ſi avrebbe adattato (§ 505, e 528) nella ſteſſa un angolo ſolido fatto da angoli di eguali triangoli equilateri del ragio della sfera; e perciò reſterebbe in quella adattato o un angolo di Piramide Regolare, o quello di un Ottaedro, o quello in fine di un Icoſaedro, del diſegnato lato; ma i lati degli angoli di Piramide Regolare di Ottaedro, d' Icoſaedro in quella Sfera adattabili ſon tutti maggiori del ragio di eſſa (§§ 52. 94. 300.); ne poſſono eſſere nella ſteſſa Sfera adattabili due eguali angoli ſolidi, de' quali ſiano i lati omologhi relativamente ineguali (§ 532); non può dunque nella Sfera interiore aver luogo alcun di quegli angoli, e perciò neppur può alcuna dell' eſteriori toccarne qualſivoglia numero di eſſe, che ſian tra ſe annularmente congiunte. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 540. Nella precedente propoſizione s' è dedotta l' eguaglianza dell' angolo ſolido naſcente nella Sfera interiore con quello

quello della Piramide, o dell' Ottaedro, o dell' Icoſaedro iſcrittibile nella ſteſſa, ſolo dal dover naſcere in quella Sfera un angolo Solido compreſo da angoli di triangoli equilateri; ma queſto non baſta nell' aſſunta Teoria. Ma baſta nell'aſſunta ipoteſi, imperciocchè, naſcerebbe quell'angolo, e naſcerebbe adattato nella Sfera, ed equilatere; dunque il ſuo ſottopoſto rettilineo ſarebbe in un piano, e ſarebbe iſcrittibile al cerchio (§ 82); ma ſarebbe queſto equilatere, giacchè eguali ſarebbero nell'angolo naſcente gli angoli piani, ed i lati, naſcerebbe dunque regolare (§ 85); ſarebbe dunque un triangolo equilatere, un quadrato, un pentagono regolare; ſecondochè da tre, quattro, o cinque angoli di triangoli equilateri naſceſſe fatto quell'angolo; corriſponderebbe dunque ſempre anche il ſottopoſto rettilineo dell' angolo nella data ipoteſi naſcente nella Sfera interiore a quello, ch' è ſottopoſto ad un angolo della Piramide, o dell' Ottaedro, o dell' Icoſaedro; e perciò ſarebbe ad un di quegli eguali (§ 406).

COROLLARIO.

§.541. Qualunque dunque ſia la combinazione, che ſi dia all' eſterne sfere, che ne toccano altra eguale, deve sempre eſſer tale, da imprimere nell'interiore tali punti di contatto, che uniti diano un ſolido iſcritto in eſſa del comun ragio, in ciaſcun angolo ſolido del quale debba intervenire angolo non di triangolo equilatere.

LEMMA I.

§. 542. *Nelle Sfere eguali i cerchj eguali ſono equidiſtanti dai riſpettivi centri di eſſe, gli equidiſtanti ſono eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 21. I. e II. Nell'eguali Sfere AIBC DKEF ſiano eguali i cerchj CI FK, nei quali tirati due qualunque ragi HC GF, ſi uniſcano i punti HC GF col centro della riſpettiva sfera.

Eſſendo per la coſtruzione le rette OH

OG

OG normali ai piani dei cerchj IC KF, misureranno le distanze, che quei cerchj ànno dai centri delle rispettive Sfere, e saranno i triangoli OHC OGF rettangoli in H G; sicchè sarà tanto nel primo il quadrato di OH la differenza de' quadrati di CO CH, ed il quadrato di CH la differenza de' quadrati di OC OH; quanto nel secondo il quadrato di OG la differenza de' quadrati di FO FG, ed il quadrato di GF la differenza de' quadrati di OF OG; dunque nelle Sfere eguali i cerchj eguali sono equidistanti dai centri di esse, e gli equidistanti sono eguali; locchè è quanto D. D.

LEMMA II.

§. 543. *Le porzioni omologhe, che dalla stessa Sfera, o da Sfer' eguali tagliano cerchj eguali son simili, ed eguali.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo e nella stessa Sfera, e nelle Sfer' eguali i cerchj eguali equidistanti dai rispettivi centri di esse (§ pr), ed essendo

a tali cerchj normali gli eguali diametri delle riſpettive sfere, che paſſano per gli centri di eſſi ; reſteran queſti diviſi da tali centri in parti relativamente eguali ; di queſte dunque tanto quelle, che comprendono i centri delle riſpettive Sfere, quanto quelle, che l'eſcludono anno egual ragione agli eguali diametri de' riſpettivi cerchj ; e perciò le porzioni omologhe, che da Sfer' eguali tagliano cerchj eguali ſon ſimili.

Fig. 37. II. Le omologhe porzioni ABC DEF ſi credano tagliate dalla ſteſſa Sfera, o da Sfer' eguali dagli eguali cerchj BC EF, queſte ſaranno ſimili ; ſicchè dovendo le di loro altezze DH AG ai diametri dell' eguali lor baſi proporzionarſi, ſaranno eguali ; ſe dunque ſi ſupponga la porzione ABC ſoprapporſi alla porzione DEF, in modo, che vada il piano del cerchio AB ſul piano del cerchio EF, e 'l centro G ſul centro H, caderà l'intero cerchio BC ſu l'intero cerchio EF a quello dall' ipoteſi eguale ; e caderà parimente la normale AG ſu la normale DH, e 'l punto A ſul punto D ; e perciò l'intera porzione ABC ſu l' intera porzione

ne DEF (§ 527); ſono dunque le porzioni omologhe &c. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 544. Siccome ſi ſon vedute ſimili, ed eguali le omologhe porzioni, che tagliano i cerchj eguali dalla ſteſſa Sfera, o da Sfer' eguali; così può agevolmente vederſi, che delle porzioni ſimili della ſteſſa Sfera, o di Sfer' eguali ſiano eguali le altezze, le baſi, le Solidità. Se delle ſimili porzioni ABC DEF appartenenti alla ſteſſa Sfera, o a Sfer' eguali ſi credano ineguali le altezze AG DH dalla maggiore AG ſi tagli la parte AI eguale alla minore DH; pel punto I ſi faccia una ſeconda ſezione KL parallel' a BC, alla quale ſarà perciò anche normale l'altezza AG, e così ſarà I il ſuo centro, ed AI l'altezza della porzione AKL; nella ſezione BC ſi tiri qualunque diametro BC, e ſi uniſchi AB AC, che incontrano la Sezione KL ne' punti MN, e ſi uniſcano i punti MN; queſta retta perchè interſezione de' piani ABC KL dovrà paſſare per I ad entrambi

trambi comune ; prodotta dunque MN ſi avrà KL diametro di queſta ſezione; ſi uniſcano in fine i punti AK AL.

Eſſendo per coſtruzione il triangolo AKL nello ſteſſo piano del triangolo AMN ; ſarà nello ſteſſo piano coll' intero triangolo ABC ; le rette dunque AB AK ſi troveranno nello ſteſſo ſemicerchio di quel cerchio , che nella Sfera imprime il piano del triangolo ABC ; e ſaran perciò ineguali gli angoli KAG BAG , che le ſteſſe fanno nel diametro AG ; ma ſe fuſſe , come s'è ſuppoſta , AI eguale a DH , appartenendo sì fatte porzioni per l' ipoteſi alla ſteſſa Sfera , o a Sfer' eguali ; ſarebbero le porzioni AKL DEF omologhe , e ſarebbero i cerchj KL EF eguali , perchè dai riſpettivi centri equidiſtanti (§ 542), ſarebbero dunque le porzioni AKL DEF ſimili (§ pr) ; ma alla porzione DEF è per l'ipoteſi ſimile la porzione ABC ; ſarebbe dunque a queſta anche ſimile AKL ; e ſarebbe perciò AI : IK : : AG : GB ; ſicchè , eſſendo anche gli angoli AIK AGB eguali per coſtruzione perchè retti ; ſarebbero i triangoli AIK AGB ſimili , e così eguali gli

an-

angoli KAI BAG, come oppoſti a quelli, che ſarebbero omologhi lati KI BG; ma queſti ſi ſon già veduti ineguali; è falſo dunque, che AI eguagli DH, ed è falſo perciò, che AG ſia ineguale a DH; ma ſe ſon queſt' eguali, eguali ſon anche i cerchj BC EF, perchè dai riſpettivi centri equidiſtanti (§ 542); e ſe queſti ſono eguali, eſſendo le porzioni ABC DEF anche omologhe, dall' eſſerſene vedute eguali le altezze; ſono anch' eguali (§ 543); delle porzioni dunque ſimili della ſteſſa sfera, o di sfer' eguali ſono eguali le altezze, le baſi, le ſolidità. C. D. D.

LEMMA III.

§. 545. *Ogni lato di Sferica porzione è media proporzionale tra il diametro della Sfera, e l'altezza della ſteſſa porzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Nella Sfera AIBC ſia preſa qualunque porzione BIC, ed in queſta eſteſo il lato BC. Da B vertice della ſteſſa porzione Fig. 21.

ne si estenda il diametro BA, questo passerà per H centro della base della stessa porzione, e sarà alla stessa base normale; si unischi AC; finalmente pel piano del triangolo ABC s' intenda fatta alla Sfera un' altra sezione, questa sarà un suo cerchio massimo, che oltre di aver AB per diametro, passerà per C; dal che si conosce che il triangolo ABC sia rettangolo in C, e che CH sia alla sua ipotenusa perpendiculare; sarà dunque AB : BC : : BC : BH, sarà cioe BC lato della porzione Sferica BCI media proporzionale tra il diametro AB della Sfera, e l'altezza BH della stessa porzione. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 546. Delle porzioni della stessa Sfera, o di Sfer' eguali, delle quali sono egual' i lati, sono eguali le altezze.

LEMMA IV.

§. 547. *Le Porzioni della stessa Sfera, o di Sfere eguali, delle quali sono egual' i lati son simili, ed eguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Son di queſte eguali le altezze (§ pr) perciò o tutte comprendono, o tutte eſcludono i centri delle riſpettive Sfere; ſon dunque omologhe (§ 522); ma avendo eguali le altezze ſon anche le di loro baſi equidiſtanti dai centri delle riſpettive sfere, e ſon perciò cerchj eguali (§ 542); e le omologhe porzioni, che dalla ſteſſa Sfera, o da Sfer'eguali tagliano cerchj eguali ſon ſimili, ed eguali (§ 543); le porzioni dunque della ſteſſa Sfera, o di Sfer' eguali, delle quali ſono eguali i lati ſon ſimili, ed eguali; C. D. D.

LEMMA V.

§. 548. *Se da un punto preſo nella ſuperficie di Sferica porzione ſianſi tirate alla periferia della ſua baſe più di due rett' eguali, è quello il vertice della ſteſſa porzione.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 7. Dal punto B preſo nella ſuperficie della Sferica porzione BADC ſianſi calate nella periferia della ſua baſe l'eguali rette BA BD BC. Si uniſchi P centro della baſe della ſteſſa porzione co' punti B A D C.

I triangoli BPA BPD BPC ſono per l'ipoteſi, e per la coſtruzione relativament' equilateri; eguali ſon dunque i di loro angoli in P; BP perciò, come normale alla baſe AC è l'altezza della porzione BADC, e'l punto B è il ſuo vertice. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 549. Ma ſon ſempre più di due i lati d'ogni angolo ſolido, ſiccome ſon più di due i ſuoi piani; l'angolo dunque ſolido equilatere compreſo da Sferica porzione occupa col ſuo vertice quello della porzione, e ſono i ſuoi lati della porzione medeſima.

PRO-

PROPOSIZIONE VI.

§. 550. *Gli angoli Solidi assolutamente, e relativamente equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da simili, ed eguali Sferiche porzioni.*

DIMOSTRAZIONE.

Gli angoli solidi equilateri, se sono adattabili nella Sfera son comprensibili da sferiche porzioni (§ 520); ma degli angoli solidi equilateri compresi da Sferiche porzioni sono i lati quelli delle porzioni medesime (§ pr): gli angoli dunque solidi, assolutamente, e relativamente equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da Sferiche porzioni, delle quali sono egual' i lati; ma le porzioni della stessa Sfera, delle quali sono egual' i lati son simili, ed eguali (§ 547); gli angoli dunque Solidi assolutamente, e relativament' equilateri, se sono adattabili nella stessa Sfera son comprensibili da simili, ed eguali sferiche porzioni. C. D. D.

LEM-

LEMMA I.

Fig.38. §. 551. *Dell' angolo ſolido ABCDE equilatere compreſo nella Sferica porzione ABCDE non può muoverſi lato alcuno per la periferia della baſe della ſteſſa porzione, ſenz' alterare la quantità dell' uno, e l' altro angolo piano, che termina.*

DIMOSTRAZIONE.

Si creda in fatti moſſo qualunque ſuo lato AC in qualunque altro punto F della ſteſſa periferia, e ſi uniſca BC, BF DC DF.

Eſſendo per ipoteſi l'angolo A equilatere, e compreſo nella Sferica porzione ABCDE; ſarà A anche vertice della ſteſſa porzione, ed AF anche lato di eſſa, come quelli dell' angolo (§ 549), e perciò a ciaſcuno di quelli eguale (§ 524); ma eſſendo nel cerchio BCFDE l' arco BF maggiore di BC, e l'arco DC maggiore di DF; ſarà il lato BF maggiore di BC, e 'l lato DC maggiore di DF; dunque l' angolo BAF è maggiore dell'

an-

angolo BAC, e l'angolo CAD maggiore dell'angolo FAD; ma non può muoverſi il lato AC, o qualunque altro per quella periferia ſenz'alterare le quantità degli archi BC CD; dunque non può muoverſi per la ſteſſa ſenz'alterare le quantità degli angoli piani, che termina; C. D. D.

COROLLARIO.

§. 552. Poichè muovendoſi un lato di un angolo Solido equilatere compreſo in porzione Sferica per la periferia della baſe della ſteſſa porzione, reſta tuttavia compreſo nella porzione medeſima (§ 521); potrà dirſi, che nella ſteſſa porzione Sferica poſſan comprenderſi due ineguali angoli ſolidi, quantunque ne ſiano i lati aſſolutamente, e relativamente eguali (§ 355).

LEMMA II.

§. 553. *Non può farſi un Solido iſcrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al ſuo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati così diſpoſti, che in ogni angolo del Solido convenga un ſol angolo di quadrato, e gli altri tutti di triangoli equilateri.*

DIMOSTRAZIONE.

Se poteſſe farſi, ſarebbe tal Solido faciendo, ed il Solido Primo di Seconda Operazione di lati eguali (che ſi dirà ſolido fatto) iſcrittibile nella ſteſſa Sfera (§ 479); ma gli angoli Solidi de'Solidi iſcrittibili alla sfera ſono adattabili nella ſteſſa (§ 528); gli angoli dunque del Solido faciendo, e del Solido fatto di lati eguali ſarebbero adattabili nella ſteſſa Sfera; ma gli angoli ſolidi aſſolutamente, e relativament' equilateri (come queſti ſarebbero) ſe ſiano adattabili nella ſteſſa Sfera ſon comprenſibili da ſimili, ed eguali Sferiche porzioni (§ 550); ſarebbero dunque gli angoli ſolidi del Solido faciendo, e quelli del Solido fatto comprenſibili in ſimili, ed eguali Sferiche porzioni; ma ne ſarebbero dalla ſteſſa ipoteſi dell'uno, e l'altro Solido anche i piani relativamente ſimili, ed eguali (§ 462); diſconverrebbe dunque ſolo il Solido faciendo dal Solido fatto, in doverſi ammettere in ogni angolo ſolido del Solido faciendo un ſol angolo di quadrato, ed in ogni angolo del Solido fatto due (§ 464); ſe poteſſe dunque farſi il

So-

Solido faciendo, potrebbe del pari così alterarsi un angolo solido del Solido fatto, da sostituire in esso in vece del secondo angolo di quadrato uno, o più altri angoli di triangoli equilateri, senza però alterare in esso i preesistenti angoli di triangoli equilateri, e senza cacciarlo da quella Sferica porzione, in cui sarebbe l'angolo fatto comprensibile; senza in somma distrugere alcuna di quelle proprietà, che debbono anche nel Solido faciendo rinvenirsi; ma non può aver luogo alcuna delle divisate mutazioni, senza distrugere tali inalterabili proprietà del Solido.

I. Non può al secondo angolo di quadrato dell'angolo Solido del Solido fatto sostituirsi un angolo di triangolo equilatere, senza distrugersi le inalterabili proprietà del Solido; perchè non possono in esso i lati, che comprendono angolo di quadrato convergers' in angolo di triangolo equilatere, senza fare una mossa; or se si faccian muovere per la periferia del cerchio, che termina la porzione, in cui si comprendeva l'angolo del Solido fatto prima della mossa, si farà un ango-

lo nella ſteſſa porzione tuttavia comprenſibile (§ 521), ma ſi muteranno anche gli angoli preeſiſtenti di triangoli equilateri (§ 551); e ſe ſi faccian muovere fuori di quella periferia ſi farà un angolo non più comprenſibile in quella porzione (§ 521).

II. Non poſſono a quel ſecondo angolo di quadrato ſoſtituirſene due di triangoli equilateri, e molto meno dippiù, ſenz' alterare i preeſiſtenti angoli di triangoli equilateri; perchè ove poteſſe ciò farſi, potrebbero altri due ſoſtituirſene all'altro angolo di quadrato, ch'è nello ſteſſo angolo, ed allora ſi avrebbe un angolo ſolido fatto da ſei, o più angoli di triangoli equilateri, locchè ripugna; Non può dunque al ſecondo angolo di quadrato, ch'è in ogni angolo ſolido del Solido fatto ſoſtituirſi uno, o più angoli di triangoli equilateri; e perciò non può farſi un Solido iſcrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al ſuo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così diſpoſti, che in ogni ſuo angolo Solido convenga un ſol angolo di quadrato, e gli altri tutti di triangoli equilateri. C. D. D.

COROLLARIO.

§. 554. Se esiste un Solido iscrittibile alla Sfera di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati così disposti, che in ogni suo angolo solido convengano due angoli di quadrati, due di triangoli (§ 462), e non può esister quello, che avendo le stesse proprietà, solo da quello sconvenga in ammettere in ogni suo angolo solido un solo angolo di quadrato; converrà confessare, che ove debba farsi un Solido iscrittibile nella Sfera di lati tutti eguali al suo ragio terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così disposti, che in ogni suo angolo Solido ammetta dell' una, e l' altra specie, ma nel massimo numero possibile ammetta quelli di triangoli, nel minimo quelli di quadrati, debba questo avere ogni suo angolo solido compreso da due angoli di triangoli equilateri due di quadrati.

PROPOSIZIONE VII.

§. 555. *Non può la Sfera toccar più di dodici Sfere eguali a se.*

DIMOSTRAZIONE.

Sarebbe la Sfera toccata dal massimo numero di altre Sfere eguali a se, quando siano tutte queste tra loro nella massima possibile aderenza; ma sono le Sfere nella massima possibile aderenza, quando sono combinate a triangolo (§ 500); sarebbe dunque la Sfera toccata dal massimo numero possibile di altre Sfere eguali a se, quando fussero queste tutte combinate a triangolo; ma non può la Sfera esser da pertutto toccata da altre Sfere eguali a se sommamente aderenti (§ 508), cioè tutte combinate a triangolo (§ 500); e la combinazione, che più alla massima aderenza s'avvicina è quella del quadrilatere (§ 500); sarà dunque la Sfera toccata dal massimo numero possibile di altre sfere eguali a se, se di queste ne siano nel massimo numero possibile combinate a triangolo, nel minimo combinate a quadrilatere; e perciò, se imprimano le esterne Sfere nella interiore tali punti di contatto, che uniti diano un

So-

Solido iſcritto in eſſa di lati tutti eguali al ſuo ragio (§ 506) terminato dal maſſimo numero poſſibile di triangoli, dal minimo numero poſſibile di quadrilateri; ma ogni Solido iſcritto nella Sfera, ſe à eguali tutt'i ſuoi lati à regolari tutt'i ſuoi piani (§ 126); uniti dunque quei punti daranno un Solido terminato dal maſſimo numero poſſibile di triangoli equilateri, dal minimo poſſibile di quadrati; ma non potendo niuna dell'eſterne Sfere toccanti altre Sfere eguali a ſe aver le aggiacenti annularmente congiunte (§ 539), cioè tutte combinate a triangolo (§ 532); è neceſſario, che in ogni angolo di quel Solido intervenga angolo di quadrato; ed ove debba farſi un Solido iſcrittibile nella Sfera di lati tutti eguali al ragio di eſſa, terminato da triangoli equilateri, e quadrati, così diſpoſti, che in ogni ſuo angolo Solido ammetta dell'una, e l'altra ſpecie, ma nel maſſimo numero poſſibile ammetta quelli di triangoli, nel minimo quelli di quadrati, è neceſſario, che in ogni ſuo angolo Solido convengano due angoli di triangoli equilateri, due di quadrati

(§ pr);

(§ pr); la combinazione dunque, anche più favorevole all' aderenza, ed alla pluralità dell'eſterne Sfere toccanti, dovrà diſegnare un Solido sì fatto; ma un Solido appunto sì fatto è il Solido Primo di Seconda Operazione (*a*), e ci à queſto co' ſuoi angoli additata una combinazione, in cui l'eſterne Sfere non ſono, che dodici (*b*); non può dunque la Sfera toccar più di dodici altre Sfere eguali a ſe. C. D. D.

AVVERTIMENTO.

§. 556. Si è detto de' Solidi Regolari, degl'Innomati, e di quelli di Seconda Operazione ciocchè poteva, e come poteva dirſi nella prima produzion de' medeſimi; altro, e meglio potrà certamente dirſi degli ſteſſi da chi vorrà penetrar il ſecondo in queſto ſteſſo occulto ma già differrato cammino; potrà dunque il ſaggio lettore compiacerſi di perdonare il modo, ed il poco al primo ſcrutatore, ed animarſi a divenirne il ſecondo.

IL FINE.

(a) § 462 e § 479.
(b) § 447 e § 507.

S. R. M.

SIGNORE.

GEnnaro e Vincenzo di Simone ſupplicano la M. V. di voler dare alle ſtampe un opera intitolata: *Trattato de' Solidi ordinati, o regolari, de' Solidi che ſaran detti innominati*. Pertanto ſupplicano la M. V. di commetterne la reviſione a chi meglio parerà, e l'avrà *ut Deus &c.*

A. & M. Rev. Prof. D. Marcellus Cecere J. U. D. perlegat, & in ſcriptis referat. Neapoli die 15. *menſis Aprilis* 1801.

F. A. C. M.

S. R. M.

SIGNORE.

NEl Trattato de' Solidi Regolari, e de' Solidi Innominati, che vuole dare alle ſtampe Gennaro, e Vincenzio de Simone, di cui la M. V. mi ha commeſſa la reviſione, non ſi contiene parola, che offenda il coſtume, o i dritti, e le leggi del voſtro Regno; onde ſon di parere, che poſſa la M. V. permettere, che ſi ſtampi; potendo piacere, e giovare la lettura di eſſo a chi ha delle matematiche facoltà intelletto, Napoli 20. Maggio 1801.

Umiliſs. e fedeliſs. ſuddito
Marcello Cecere.

Viſa relatione Regii Reviſoris imprimatur.
Neapoli die 16. menſis Julii 1801.

F. A. C. M.

Joſeph Abate Secr.

Viſa relatione Domini D. Marcelli Cecere de commiſſione Rev. Reg. Cap. Maj.

Die 21. menſis Julii 1801. Neap.

Regalis Camera S. Claræ providet, decernit, atque mandat quod imprimatur cum inſerta forma præſentis ſupplicis libelli, ac approbationis dicti Rev. Reviſoris; Verum non publicetur niſi per ipſum Reviſorem facta iterum reviſione affirmetur quod concordat ſervata forma Regalium Ordinum, ac etiam in publicatione ſervetur Regia Pragmatica, Hoc ſuum &c.

BISOGNI. CIANCIULLI.

V. A. R. C.

Paſcale.

Illuſtris Marchio de Jorio Pro-Præſ. S. R. C., & cæteri Spect. Aular. Præſ., temp. ſubſcript. imped.

Adm. Rev. Dom. D. Antonius Febraro S. Th. Prof. revideat opus ſupradictum, & ſcripto referat. Die 12. menſis Sept. 1801.

F. ROSSI CAN. DEP.

ILLUSTRISSIMO SIGNORE.

AVendo letto per ordine di V. S. Ill. il Trattato de' Solidi Regolari, ed Innominati compoſto dal Sacerdote Napoletano D. Ceſare Puoti, che bramano dar alla luce per mezzo delle ſtampe i fratelli Gennaro, e Vincenzo di Simone; non ho ravviſato coſa in eſſo, che fuſſe oppoſta o alla purità della Fede, od alla integrità de' coſtumi; anzi è portata in maniera la ſua teſſitura, che poſſa riuſcir vantaggioſa a chi ama applicarſi alle mattematiche diſcipline. Perciò ſon di parere, ſe diverſamente non giudica V.S.Ill., poterſi accordare la permiſſione delle ſtampe.

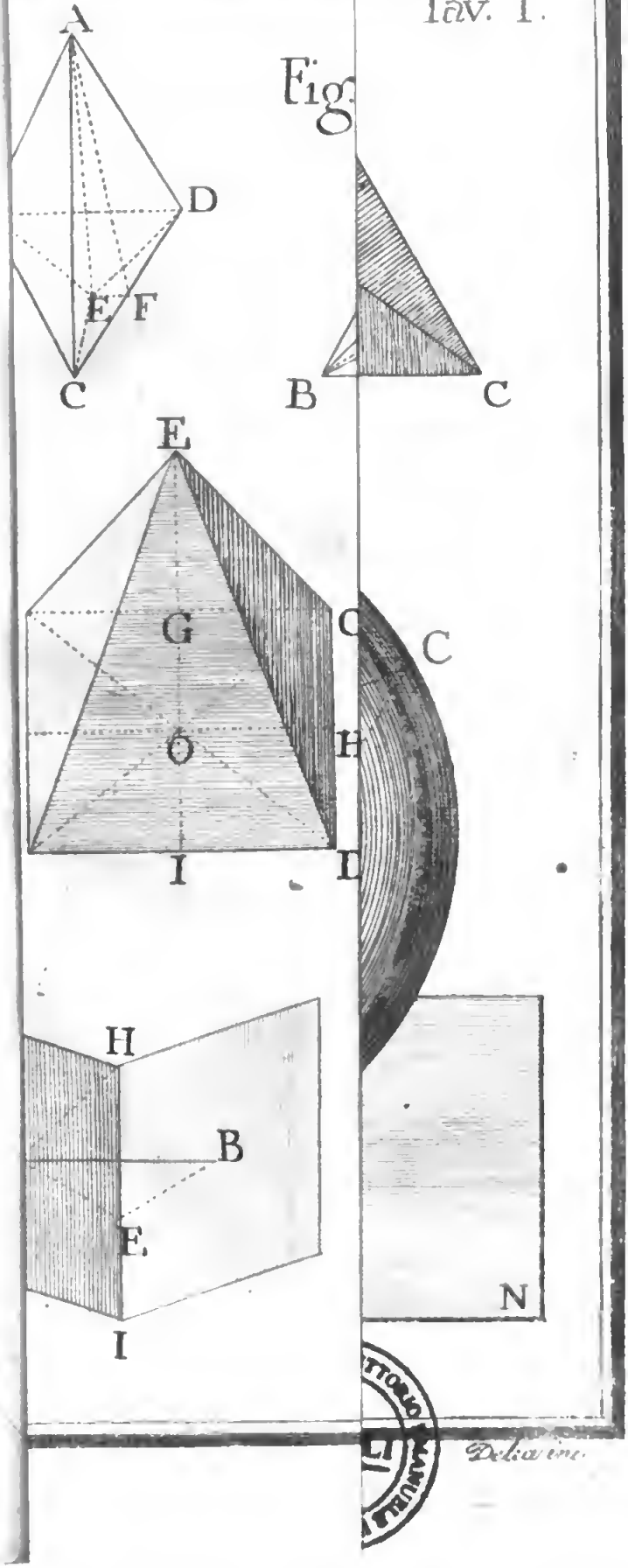
Napoli 20. Settembre 1801.

Di V.S.Ill.

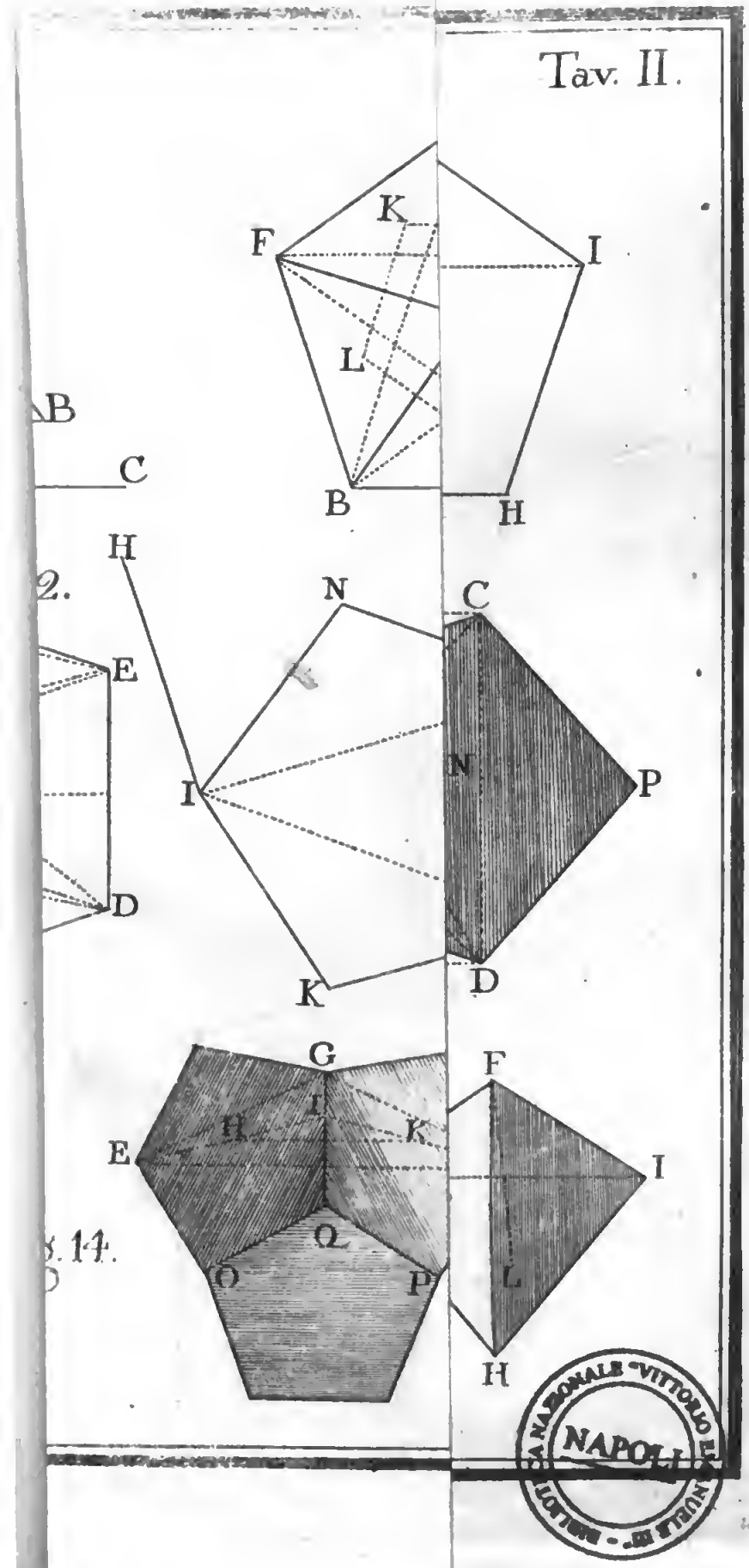
Umiliſs.ed oſſequioſiſs.ſervidore
Antonio Febraro.

A01 1462273

Tav. I.

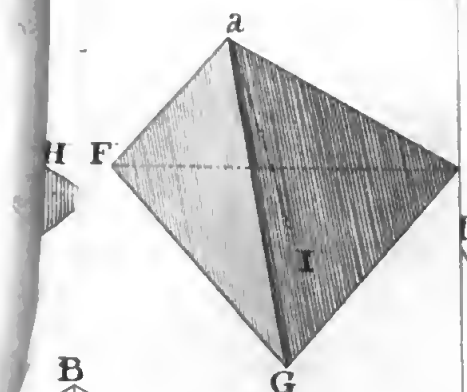


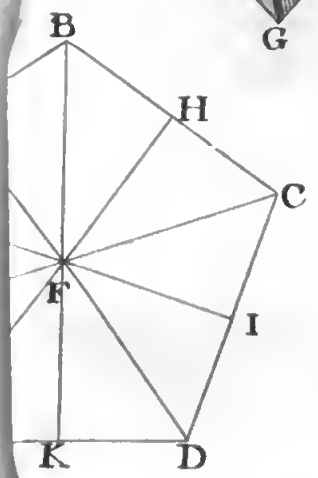
Tav. II.



BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" - NAPOLI

Tav. III.





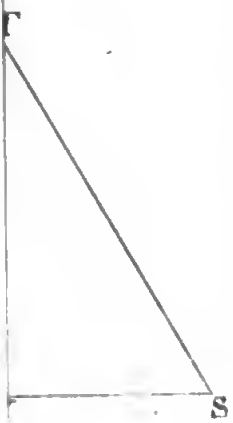
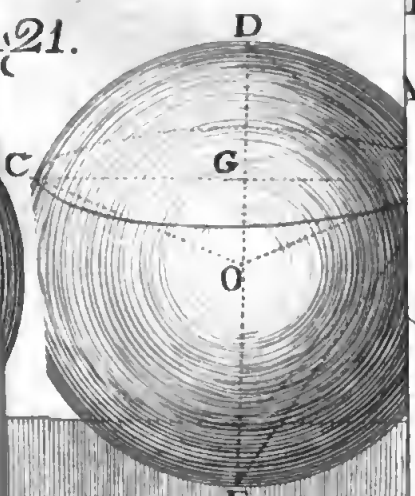
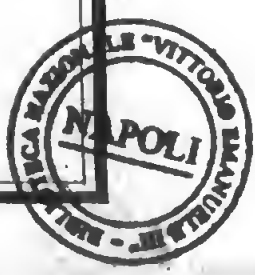


Fig.

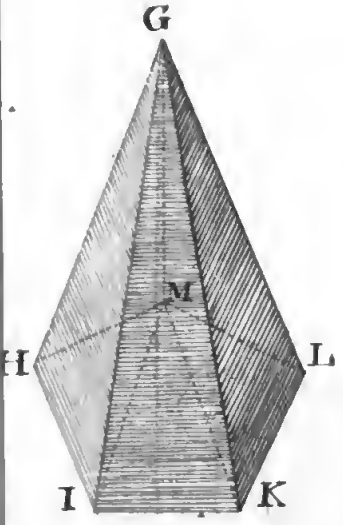
Fig. 20.

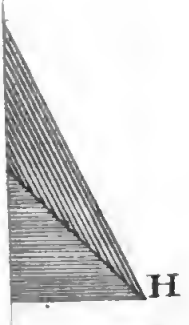
i 21.

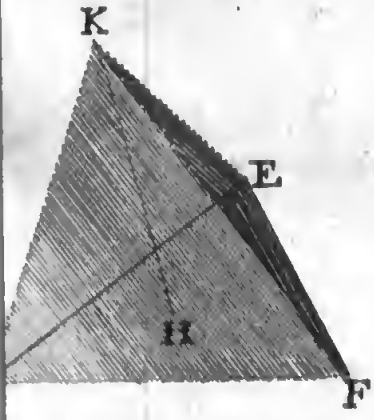


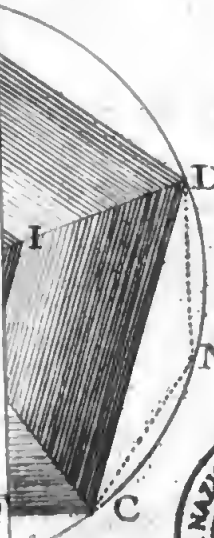


Tav. IV.





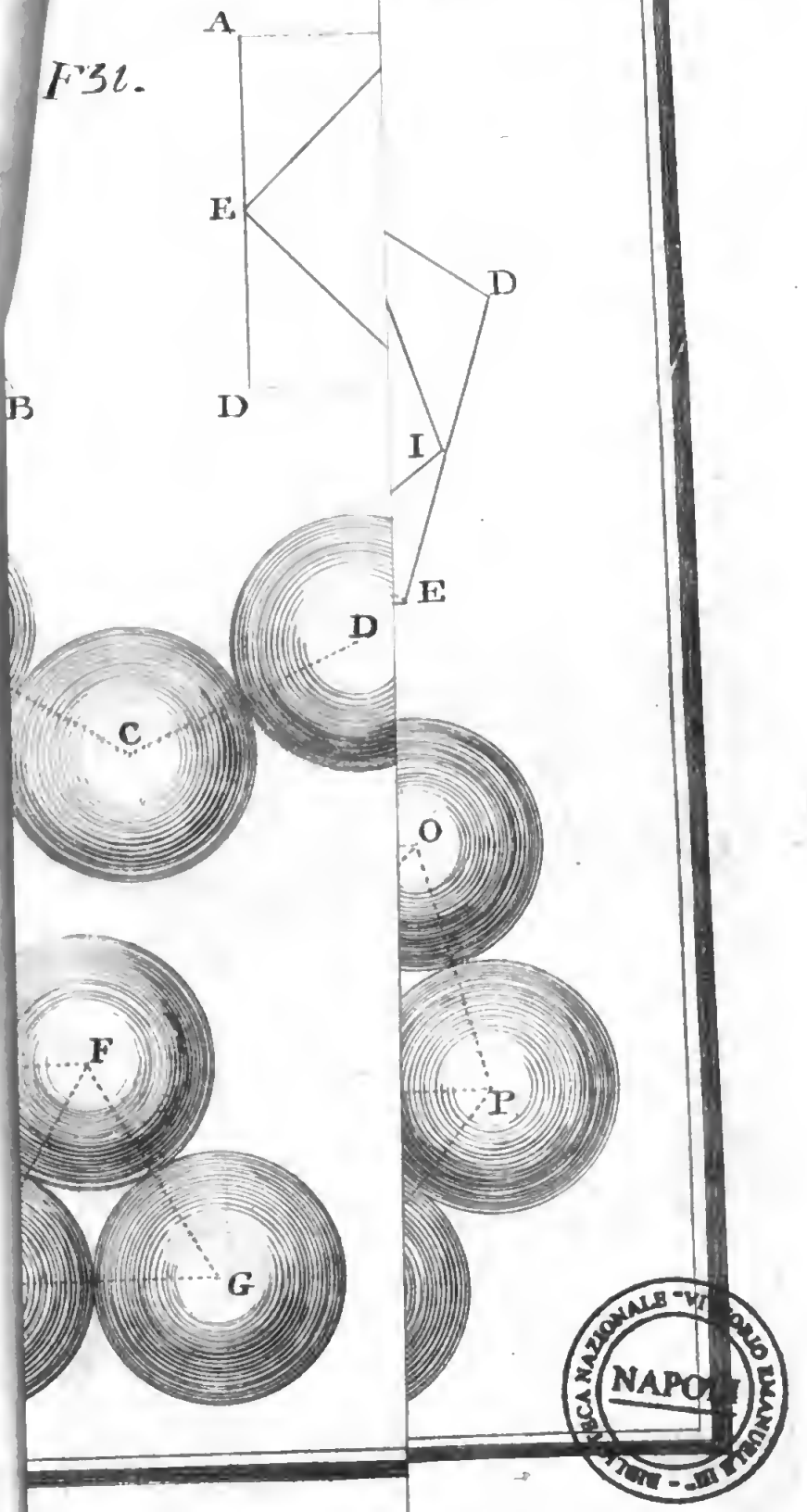




BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

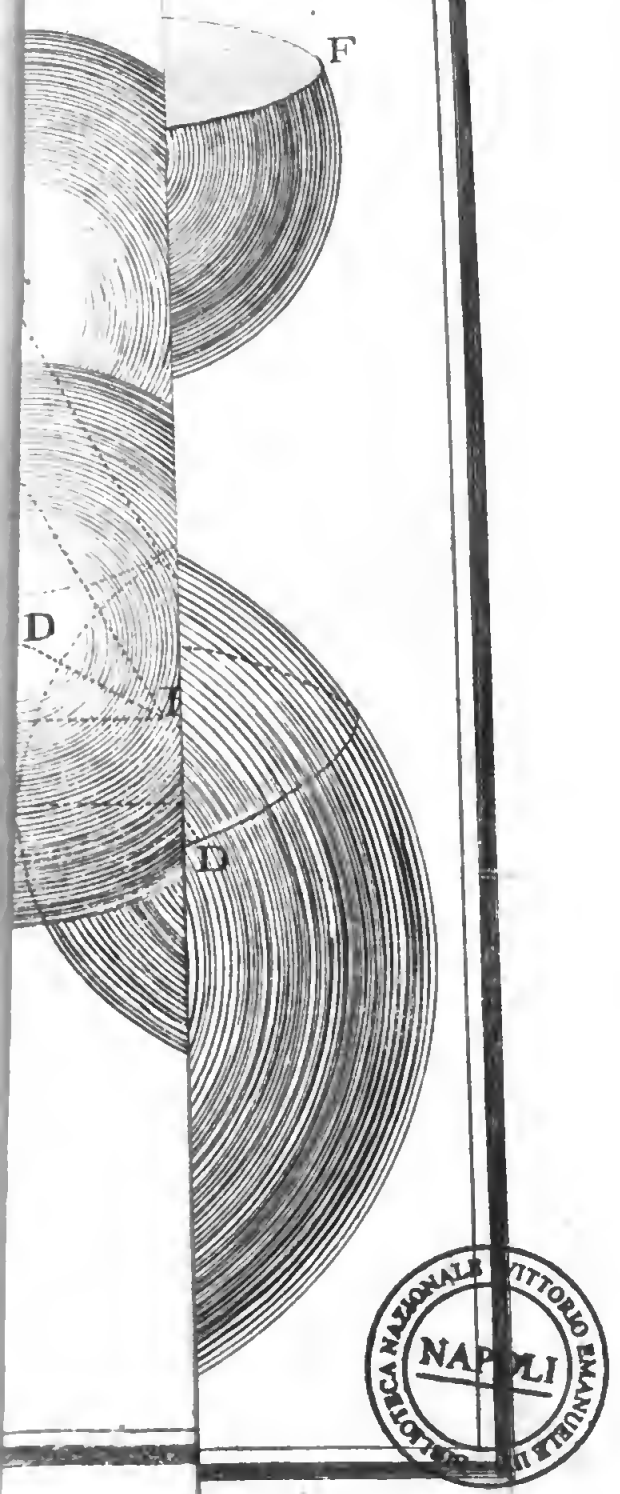
Tav. V.

Fig.



BIBLIOTECA NAZIONALE - VITTORIO EMANUELE III - NAPOLI

Tav. VI.



BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE III
NAPOLI

34.6.35